

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления
Кафедра моделирования электромеханических и компьютерных систем

Маслова Татьяна Андреевна

Магистерская диссертация

**Математическое моделирование эмиссионной системы
с модулятором на основе эллипсоидального
полевого катода**

Направление 03.04.01

«Прикладные математика и физика»

Магистерская программа «прикладная информатика»

Руководитель научной программы,
доктор физ.-мат. наук,
профессор

Егоров Н. В.

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор

Виноградова Е. М.

Санкт-Петербург
2018

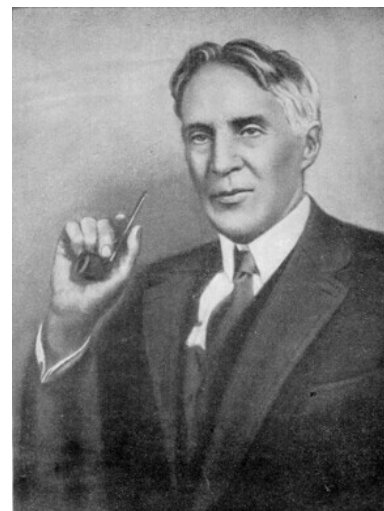
Оглавление

Введение	4
1. Обзор литературы	6
1.1. Эмиссионные системы	6
1.2. Используемые методы	7
2. Моделирование диодной системы с кусочно- постоянными граничными условиями на аноде	8
2.1. Физическая постановка задачи для диодной системы . .	8
2.2. Математическая модель диодной системы	9
2.3. Решение граничной задачи для диодной системы	10
3. Моделирование триодной системы с нулевыми гранич- ными условиями на аноде	13
3.1. Физическая постановка задачи для триодной системы с нулевыми граничными условиями	13
3.2. Математическая модель триодной системы с нулевыми граничными условиями	14
3.3. Решение граничной задачи для триодной системы с нуле- выми граничными условиями	14
4. Моделирование триодной системы с ненулевыми гра- ничными условиями на аноде	22
4.1. Физическая постановка задачи для триодной системы . .	22
4.2. Математическая модель триодной системы	22
4.3. Решение граничной задачи для триодной системы	24
5. Моделирование триодной системы методом перекрытия областей	30
5.1. Физическая постановка задачи для триодной системы на основе полуэллипсоидального полевого катода	30
5.2. Математическая модель триодной системы на основе по- луэллипсоидального полевого катода	31

5.3. Решение граничной задачи для триодной системы на основе полуэллипсоидального полевого катода	32
5.4. Исследование нулей функций Лежандра	38
6. Результаты численных расчётов	40
6.1. Расчёт электростатического потенциала	40
6.2. Расчёт напряжённости	42
6.3. Исследование параметров острия	48
6.4. Расчёт плотности тока	50
6.5. Сравнение методов	52
Заключение	54
Список литературы	55

Введение

Благодаря открытию автоэлектронной эмиссии Робертом Вудом в 1897 году, определилась совершенно новая область микро- и наноэлектроники, а именно вакуумная микроэлектроника [1]. Автоэлектронная эмиссия позволила создать новое поколение эффективных электронных приборов с высокой эмиссионной способностью. Такие приборы обладают рядом преимуществ: устойчивость к колебаниям температуры, отсутствие накала, малая чувствительность к внешней радиации, высокая плотность тока.



Robert Williams Wood
1868-1955.

Наноразмерные автоэмиссионные системы нашли широкое применение в разработке электронно-лучевых приборах, а именно, в полевых электронных и сканирующих туннельных микроскопах. Так же подобные системы представляют собой миниатюрные источники рентгеновского излучения, которое используется для диагностики и внутриполостного лечения онкологических заболеваний [2].

При разработке эмиссионных систем требуется учитывать всё большее количество геометрических параметров приборов [3]. Задача является трудоёмкой из-за высокой чувствительности автоэмиссии к изменению геометрии катода (рис. 0.1). Математическое моделирование является важным элементом проектирования, который позволяет предварительно проанализировать возможности новых приборов.

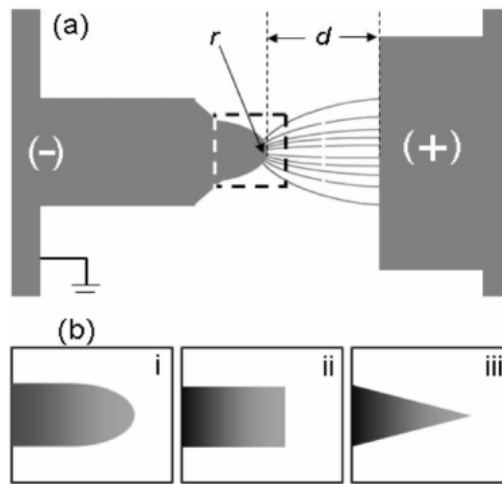


Рис. 0.1. (a) Схематическое изображение диодной системы. Излучение происходит с острия эмиттера. (b) У излучателя могут быть разные токи эмиссии в зависимости от геометрии острия, например, (i) круглый наконечник, (ii) тупой наконечник и (iii) конический наконечник [4].

Цель — разработать математические и физические модели эмиссионных систем с полевым катодом эллипсоидальной формы.

Задачи:

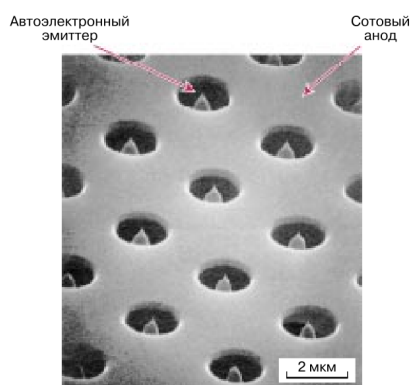
- Рассмотреть физические модели диодной и триодной систем.
- Разработать математическую модель диодной системы.
- Разработать математические модели триодных систем.
- Выбрать методы решения поставленных задач.
- Найти значения электростатического потенциала во всех областях рассматриваемых систем в аналитическом виде.
- Визуализировать полученные результаты для диодной системы.

1. Обзор литературы

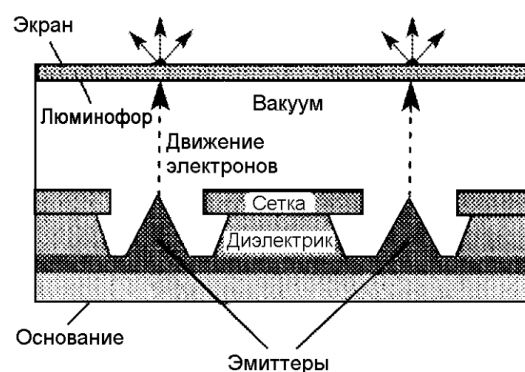
1.1. Эмиссионные системы

Автоэлектронная эмиссия (полевая эмиссия, туннельная эмиссия, электростатическая эмиссия) — испускание электронов проводящими твёрдыми и жидкими телами под действием внешнего электрического поля высокой напряжённости [3].

Для протекания полевой эмиссии, необходимо прикладывать огромные напряжения порядка десятка миллионов вольт, что, безусловно, является большим минусом. В том случае, если придать катоду форму тонкого острия с радиусом кривизны на вершине в десятые или сотые доли микрона, автоэлектронную эмиссию можно возбудить при напряжениях на электродах порядка сотни и даже десятка вольт [1, 5].



а) Многоэмиттерная матрица с сотовым анодом [1].



б) Схема поперечного сечения полевого эмиссионного дисплея [2].

Рис. 1.1. Примеры острых систем.

Открытие автоэлектронной эмиссии положило начало созданию новых методов исследования топологии поверхности (сканирующая и просвечивающая электронная микроскопия сверхвысокого разрешения, электронная голография, туннельная микроскопия, и др.).

Явление полевой эмиссии так же нашло своё применение для создания нового класса дисплеев на базе многоострийных автокатодов (рис. 1.1). Такие дисплеи, по своим параметрам значительно превышают существующие и оказываются дешевле [1].

В силу того, что эмиссионные характеристики подобных приборов

сильно зависят как от формы острия, так и от геометрических параметров остальных электродов, расчёт таких моделей представляет собой трудную задачу и требует учёта всех характеристик системы [3]. Поэтому аналитические методы расчёта эмиссионных систем на основе полевой эмиссии в литературе, посвящённой данной тематике, представлены в очень ограниченном числе исследований [6–9].

1.2. Используемые методы

В теории потенциала важное место занимает дифференциальное уравнение Лапласа $\Delta U = 0$, где Δ — оператор Лапласа ($\Delta = \text{div grad}$), U — функция, непрерывная вместе со своими частными производными [10]. Так же на функцию U накладываются дополнительные граничные условия. Решением задачи, состоящей из уравнения Лапласа и граничных условий, является функция распределения потенциала.

В данной работе использованы такие аналитические методы решения граничной задачи как метод разделения переменных [11], метод парных сумматорных уравнений [12] и метод перекрытия областей [13]. Перечисленные методы являются основными методами исследования в математической физике.

2. Моделирование диодной системы с кусочно-постоянными граничными условиями на аноде

2.1. Физическая постановка задачи для диодной системы

В качестве физической модели рассматривается система: острый металлический катод формы эллипсоида вращения на плоской подложке и металлический анод, представляющий собой часть эллипсоида вращения на основе острейного полевого катода (рис. 2.1). Напряжение на катоде и подложке $U = 0$, на анод подаётся постоянное напряжение $U = u_0$. У границы твёрдого тела создаётся внешнее электростатическое поле, которое ускоряет электроны от поверхности катода. В результате возникает ток полевой электронной эмиссии, который регистрируется на аноде.

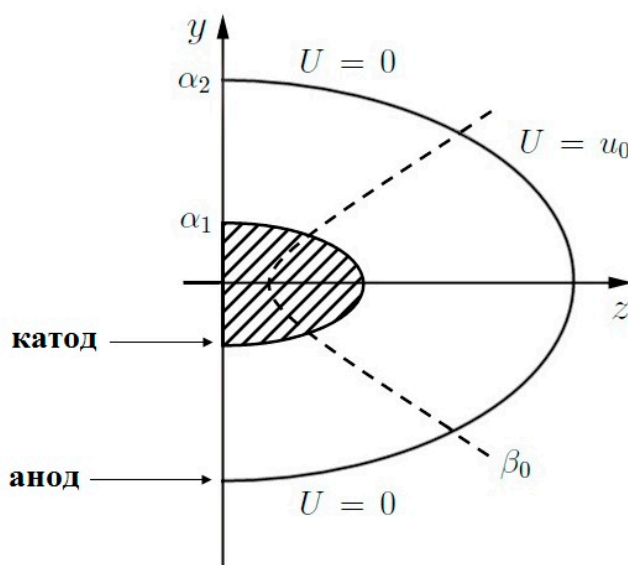


Рис. 2.1. Схематическое изображение эллиптической диодной системы.

За счёт выбора представления поверхностей электродов в качестве формы эллипсоидов вращения в данной работе предлагается производить моделирование системы с использованием вырожденных эллипсоидальных координат вытянутого эллипсоида вращения.

Связь между координатами вытянутого эллипсоида вращения и декартовыми координатами определяется формулами [11]

$$\begin{cases} x = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \cos \varphi, \\ y = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \sin \varphi, \\ z = c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\alpha \in [0, \infty)$, $\beta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, c — фокальный радиус. Координатными поверхностями являются вытянутые эллипсоиды вращения ($\alpha = \text{const}$), двухполостные гиперболоиды вращения ($\beta = \text{const}$) и плоскости ($\varphi = \text{const}$) [11].

Параметры системы:

$\alpha = \alpha_1, \quad \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ — поверхность катода;

$\alpha = \alpha_2, \quad \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ — поверхность анода;

$\alpha \in [\alpha_1, \alpha_3], \quad \beta = \frac{\pi}{2}$ — поверхность плоской подложки;

$U(\alpha_1, \beta) = 0$ — значение потенциала на катоде;

$U(\alpha_2, \beta) = u_0, \quad \beta \in [0, \beta_0]$ — значение потенциала на аноде;

$U(\alpha_2, \beta) = 0, \quad \beta \in [\beta_0, \frac{\pi}{2}]$ — значение потенциала на аноде;

$U(\alpha, \frac{\pi}{2}) = 0$ — потенциал на плоской подложке.

2.2. Математическая модель диодной системы

Решается задача нахождения электростатического потенциала для острой системы, поэтому в качестве математической модели, описывающей данную систему, рассматривается уравнение Лапласа в эллипсоидальных координатах [14]:

$$\Delta U(\alpha, \beta, \varphi) = 0 \quad (2.2)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} U(\alpha_1, \beta) = 0, & \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]; \\ U(\alpha_2, \beta) = 0, & \beta \in (\beta_0, \frac{\pi}{2}]; \\ U(\alpha_2, \beta) = u_0, & \beta \in [0, \beta_0); \\ U(\alpha, \frac{\pi}{2}) = 0, & \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]. \end{cases} \quad (2.3)$$

Предполагается, что U не зависит от угла φ (осесимметричная задача). Уравнение Лапласа в координатах вытянутого эллипсоида вращения для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\frac{1}{c^2(\sin^2 \beta + \operatorname{sh}^2 \alpha)} \left[c \operatorname{th} \alpha \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + c \operatorname{tg} \beta \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} \right] = 0. \quad (2.4)$$

2.3. Решение граничной задачи для диодной системы

Поставленная задача решалась методом разделения переменных [11]. Общее решение принимает вид [14, 15]:

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta) = & \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \times \\ & \times b_n \frac{P_n(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_n(\operatorname{ch} \alpha) - P_n(\operatorname{ch} \alpha) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_n(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра, $Q_n(x)$ — функции Лежандра второго рода [10].

Разложим граничную функцию f в ряд по полиномам Лежандра:

$$f(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(\cos \beta), \quad (2.6)$$

где

$$\begin{cases} f(\beta) = u_0, & \beta \in [0, \beta_0); \\ f(\beta) = 0, & \beta \in [\beta_0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases} \quad (2.7)$$

Производилось умножение (2.6) на $\sin(\beta) P_k(\cos \beta)$ и интегрирова-

ние по аргументу β в пределах $\beta \in [0, \pi]$

$$\int_0^\pi f(\beta) \sin(\beta) P_k(\cos \beta) d\beta = b_n \int_0^\pi \sin(\beta) P_n(\cos \beta) P_k(\cos \beta) d\beta. \quad (2.8)$$

Использовалось свойство ортогональности полиномов Лежандра [16] на $[-1, 1]$:

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0, & m \neq n, \\ \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1}, & m = n, \end{cases} \quad (2.9)$$

тогда

$$\int_0^\pi f(\beta) \sin(\beta) P_k(\cos \beta) d\beta = b_n \frac{2}{2n+1}, \quad (2.10)$$

Для того, чтобы учесть условие о наличии плоской подложки с нулевым потенциалом, полагается:

$$\begin{cases} f(\beta) = -u_0, & \beta \in [\pi - \beta_0, \pi); \\ f(\beta) = 0, & \beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi - \beta_0]. \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\int_0^{\beta_0} f(\beta) \sin(\beta) P_n(\cos \beta) d\beta + \int_{\pi-\beta_0}^\pi f(\beta) \sin(\beta) P_n(\cos \beta) d\beta = b_n \frac{2}{2n+1}, \quad (2.12)$$

Пользуясь свойством $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, получаем

$$\int_{\cos \beta_0}^1 u_0 P_n(\cos \beta) (1 - (-1)^n) d(\cos \beta) = b_n \frac{2}{2n+1}. \quad (2.13)$$

Отсюда следует, что n — нечётное.

Интеграл в левой части последнего выражения выражается по формуле $\int_{\cos \varphi}^1 P_\nu(x) dx = \sin \varphi P_\nu^{-1}(\cos \varphi)$ [19], тогда

$$u_0 \sin \beta_0 P_n^{-1}(\cos \beta_0) = b_n \frac{1}{2n+1}. \quad (2.14)$$

Неизвестные коэффициенты имеют вид

$$b_n = u_0 \sin \beta_0 P_n^{-1}(\cos \beta_0)(2n+1), \quad (2.15)$$

где $P_n^{-1}(\cos \beta_0)$ находятся по формуле [19]

$$P_\nu^{-1}(\cos \varphi) = \frac{-1}{\nu(\nu+1)} \frac{dP_\nu(\cos \varphi)}{d\varphi}. \quad (2.16)$$

Итоговая формула для неизвестных коэффициентов:

$$b_n = \frac{-u_0(2n+1)}{n} [P_{n+1}(\cos \beta_0) - \cos \beta_0 P_n(\cos \beta_0)], \quad n = 2k+1. \quad (2.17)$$

3. Моделирование триодной системы с нулевыми граничными условиями на аноде

3.1. Физическая постановка задачи для триодной системы с нулевыми граничными условиями

В качестве физической модели рассматривается система: острый металлический катод и анод формы эллипсоидов вращения, металлический модулятор с отверстием на основе острейного полевого катода (рис. 3.1). Напряжение на катоде и аноде $U = 0$, на модулятор подаётся постоянное напряжение $U = f(\beta)$.

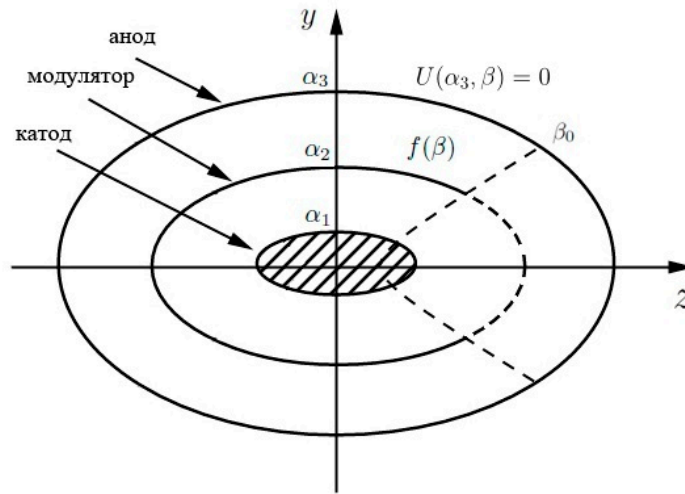


Рис. 3.1. Схематическое изображение эллиптической триодной системы.

Параметры системы:

$\alpha = \alpha_1, \quad \beta \in [0, \pi]$ — поверхность катода;

$\alpha = \alpha_3, \quad \beta \in [0, \pi]$ — поверхность анода;

$\alpha = \alpha_2, \quad \beta \in [\beta_0, \pi]$ — поверхность модулятора;

$U(\alpha_1, \beta) = 0$ — значение потенциала на катоде;

$U(\alpha_2, \beta) = f(\beta), \quad (\beta \in [\beta_0, \pi])$ — значение потенциала на модуляторе;

$U(\alpha_3, \beta) = 0$ — значение потенциала на аноде.

3.2. Математическая модель триодной системы с нулевыми граничными условиями

Решается задача для распределения электростатического потенциала для острой системы, поэтому в качестве математической модели, описывающей данную систему, рассматривается уравнение Лапласа в эллипсоидальных координатах [11]:

$$\Delta U(\alpha, \beta, \varphi) = 0 \quad (3.1)$$

с граничными условиями

$$\left\{ \begin{array}{l} U(\alpha_1, \beta) = 0, \quad \beta \in [0, \pi]; \\ U(\alpha_3, \beta) = 0, \quad \beta \in [0, \pi]; \\ U(\alpha_2, \beta) = f(\beta), \quad \beta \in (\beta_0, \pi]; \\ \frac{\partial U}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2-0} = \frac{\partial U}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2+0}, \quad \beta \in [0, \beta_0). \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Последнее граничное условие является условием непрерывности нормальной составляющей напряженности поля на границе раздела областей [11].

3.3. Решение граничной задачи для триодной системы с нулевыми граничными условиями

Для решения смешанных краевых задач математической физики с дискретным спектром собственных значений применяются парные ряды, содержащие разложения Фурье – Бесселя и Лежандра. В нашем случае для решения поставленной граничной задачи был использован метод парных сумматорных уравнений, содержащих полиномы Лежандра [12, 17].

Сведение смешанных задач к парным уравнениям возможно, только в тех случаях, для которых применим способ разделения переменных. Поэтому метод парных уравнений следует рассматривать как естественное обобщение классического метода Фурье на некоторые

классы смешанных задач теории потенциала. При этом необходимый математический аппарат значительно усложняется: если получаемые по методу Фурье точные решения имеют вид бесконечных рядов или интегральных разложений, то парные уравнения могут быть сведены либо к интегральным уравнениям, либо к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений [12].

В данной работе имеем дело с уравнением (2.4) с разделяющимися переменными, поэтому для решения смешанной задачи (3.1) – (3.2) применяем метод парных сумматорных уравнений.

Для решения краевой задачи внутреннюю площадь системы можно разделить на две подобласти

$$\mathbf{1} - (\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2], \quad \beta \in [0, \pi]),$$

$$\mathbf{2} - (\alpha \in [\alpha_2, \alpha_3], \quad \beta \in [0, \pi]).$$

Представим электростатический потенциал в области 1 и в области 2 в виде разложений по полиномам Лежандра:

$$\begin{cases} U_1(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \beta) \frac{\hat{h}(\lambda\alpha)}{\hat{h}(\lambda\alpha_2)}, & \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]; \\ U_2(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \beta) \frac{h(\lambda\alpha)}{h(\lambda\alpha_2)}, & \alpha \in [\alpha_2, \alpha_3], \end{cases} \quad (3.3)$$

где $\hat{h}(\lambda\alpha), h(\lambda\alpha)$ — собственные функции уравнений, получающихся после разделения переменных [18]:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{h}(\lambda\alpha)}{\hat{h}(\lambda\alpha_2)} &= \frac{P_n(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_n(\operatorname{ch} \alpha) - P_n(\operatorname{ch} \alpha) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_n(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1)}, \\ \frac{h(\lambda\alpha)}{h(\lambda\alpha_2)} &= \frac{P_n(\operatorname{ch} \alpha) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_3) - P_n(\operatorname{ch} \alpha_3) Q_n(\operatorname{ch} \alpha)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_3) - P_n(\operatorname{ch} \alpha_3) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_2)}, \end{aligned}$$

A_n — неизвестные коэффициенты.

Выполнение граничного условия для потенциала на участке $\alpha = \alpha_2, \beta \in (\beta_0, \pi]$ и условия сшивания производных на участке

$\alpha = \alpha_2, \beta \in [0, \beta_0)$ приводят к парным уравнениям [13]

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \beta) B_n = 0, & \beta \in [0, \beta_0]; \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \beta) = f(\beta), & \beta \in [\beta_0, \pi], \end{cases} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} B_n &= \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{h(\lambda \alpha)}{h(\lambda \alpha_2)} \right] \Big|_{\alpha=\alpha_2-0} - \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\hat{h}(\lambda \alpha)}{\hat{h}(\lambda \alpha_2)} \right] \Big|_{\alpha=\alpha_2+0} = \\ &= \frac{n+1}{\operatorname{sh} \alpha_2} \left(\frac{P_n(\operatorname{ch} \alpha_1) \overline{KQ}_{n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) - Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1) \overline{KP}_{n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2)}{W_n(\alpha_1, \alpha_2)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{Q_n(\operatorname{ch} \alpha_3) \overline{KP}_{n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_n(\operatorname{ch} \alpha_3) \overline{KQ}_{n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2)}{W_n(\alpha_2, \alpha_3)} \right), \end{aligned}$$

обозначение:

$$W_n(a, b) = P_n(\operatorname{ch} a) Q_n(\operatorname{ch} b) - P_n(\operatorname{ch} b) Q_n(\operatorname{ch} a),$$

$P_n(x)$ — полиномы Лежандра, $Q_n(x)$ — функции Лежандра второго рода [19].

$$\overline{KP}_{n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) = P_{n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) - \operatorname{ch} \alpha_2 P_n(\operatorname{ch} \alpha_2),$$

$$\overline{KQ}_{n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) = Q_{n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) - \operatorname{ch} \alpha_2 Q_n(\operatorname{ch} \alpha_2).$$

Введём обозначения

$$C_n = \frac{A_n B_n}{n + 1/2}, \quad 1 - g_n = \frac{n + 1/2}{B_n}, \quad (3.5)$$

тогда

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) C_n P_n(\cos \beta) = 0, & \beta \in [0, \beta_0], \\ \sum_{n=0}^{\infty} (1 - g_n) C_n P_n(\cos \beta) = f(\beta), & \beta \in [\beta_0, \pi]. \end{cases} \quad (3.6)$$

Уравнения (3.6) называют парными уравнениями стандартного вида [12]. Парные уравнения рассматриваемого типа могут быть сведены к регулярному интегральному уравнению Фредгольма способом,

основанным на использовании следующих разложений некоторых разрывных функций в ряды по полиномам Лежандра [20]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t P_n(\cos \theta) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \theta < \pi, \\ [2(\cos \theta - \cos t)]^{-1/2}, & 0 < \theta < t \leq \pi, \end{cases} \quad (3.7-a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) t P_n(\cos \theta) = \begin{cases} [2(\cos t - \cos \theta)]^{-1/2}, & 0 \leq t < \theta < \pi, \\ 0, & 0 < \theta < t \leq \pi. \end{cases} \quad (3.7-b)$$

Разложения (3.7-a), (3.7-b) получены из известных интегральных представлений Малера – Дирихле для полиномов Лежандра ($0 < \theta < \pi$)

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos x)}} dx, \quad (3.8-a)$$

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{\sqrt{2(\cos x - \cos \theta)}} dx. \quad (3.8-b)$$

Здесь и далее будем обозначать $\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x = \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right)$,
 $\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x = \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right)$.

Положим неизвестный коэффициент C_n равным

$$C_n = \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt, \quad (3.9)$$

где $\varphi(t)$ — новая неизвестная функция, которая предполагается непрерывно дифференцируемой. Подставляем выражение (3.9) в первое уравнение (3.6), получаем

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) C_n P_n(\cos \beta) = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(\cos \beta) \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) t dt \right] = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(\cos \beta) \frac{1}{n + 1/2} \times \\
& \quad \times \left[-\varphi(t) \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) t \Big|_{\beta_0}^{\pi} + \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi'(t) \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) t dt \right] = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \left[\varphi(\beta_0) \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta_0 + \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi'(t) \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) t dt \right] = \\
& = \varphi(\beta_0) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta_0 + \\
& \quad + \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi'(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) t \right] dt = 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Интеграл $\int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) t dt$ брали по частям:

$$\int_{\beta_0}^{\pi} u dv = uv \Big|_{\beta_0}^{\pi} - \int_{\beta_0}^{\pi} v du, \text{ где } u = \varphi(t), \quad dv = \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) t dt.$$

В силу (3.7-б) и неравенства $0 < \beta < t \leq \pi$ приходим к равенству нулю выражения (3.10):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) C_n P_n(\cos \beta) = 0.$$

Таким образом, первое уравнение (3.6) удовлетворено тождественно. Теперь подставляем (3.9) во второе уравнение (3.6), получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (1-g_n) C_n P_n(\cos \beta) &= \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] dt - \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_n(\cos \beta) \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = \\
&= \int_{\beta}^{\pi} \varphi(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] dt - \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_n(\cos \beta) \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = \\
&= \int_{\beta}^{\pi} \varphi(t) \frac{dt}{\sqrt{2(\cos \beta - \cos t)}} - \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_n(\cos \beta) \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = f(\beta).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Здесь интеграл представили в виде суммы двух интегралов, один из которых по формуле (3.7-а) ($0 \leq t < \beta < \pi$) равен нулю:

$$\begin{aligned}
&\int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] dt = \\
&= \int_{\beta_0}^{\beta} \varphi(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] dt + \\
&\quad + \int_{\beta}^{\pi} \varphi(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] dt = \\
&= \int_{\beta}^{\pi} \varphi(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] dt;
\end{aligned} \tag{3.12}$$

и воспользовались (3.7-а) для $0 < \beta < t \leq \pi$.

Перепишем (3.11)

$$\int_{\beta}^{\pi} \varphi(x) \frac{dx}{\sqrt{2(\cos \beta - \cos x)}} - \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_n(\cos \beta) \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = f(\beta) \quad (3.13)$$

Применяя интегральное представление (3.8-а) для (3.13), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\beta}^{\pi} \varphi(x) \frac{dx}{\sqrt{2(\cos \beta - \cos x)}} - \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{2}{\pi} \int_{\beta}^{\pi} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{\sqrt{2(\cos \beta - \cos x)}} dx \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = f(\beta), \\ & \int_{\beta}^{\pi} \left[\varphi(x) - \frac{2}{\pi} \int_{\beta_0}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \varphi(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt \right] \times \\ & \times \frac{dx}{\sqrt{2(\cos \beta - \cos x)}} = f(\beta). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Введём обозначение:

$$G(y) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) y. \quad (3.15)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & G(t+x) - G(t-x) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) (t+x) \right) - \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) (t-x) \right) = \\ & = -2 \sum_{n=0}^{\infty} g_n \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Подставляя (3.16) в (3.14), приходим к выражению

$$\int_{\beta}^{\pi} \left[\varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) [G(t+x) - G(t-x)] dt \right] \times \times \frac{dx}{\sqrt{2(\cos \beta - \cos x)}} = f(\beta). \quad (3.17)$$

Выражение (3.17) — уравнение Абеля, решением которого в нашем случае является уравнение Фредгольма второго рода [12, 20]:

$$\varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\beta_0}^{\pi} K(x, t) \varphi(t) dt = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^{\pi} \frac{f(\beta) \sin \beta d\beta}{\sqrt{2(\cos x - \cos \beta)}}, \quad x \in (\beta_0, \pi), \quad (3.18)$$

ядро которого имеет вид

$$K(x, t) = G(t-x) - G(t+x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} g_n \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x. \quad (3.19)$$

В случае, когда $f(\beta) = f = \text{const}$, правая часть уравнение (3.18) значительно упрощается:

$$\varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\beta_0}^{\pi} K(x, t) \varphi(t) dt = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{f \sin x}{\sqrt{\cos x + 1}}, \quad x \in (\beta_0, \pi). \quad (3.20)$$

Таким образом, для нахождения неизвестных коэффициентов C_n (3.5), а затем и A_n необходимо решить уравнение (3.20). Это уравнение может быть решено численно методом последовательных приближений, заменой ядра вырожденным или методом квадратур [21].

4. Моделирование триодной системы с ненулевыми граничными условиями на аноде

4.1. Физическая постановка задачи для триодной системы

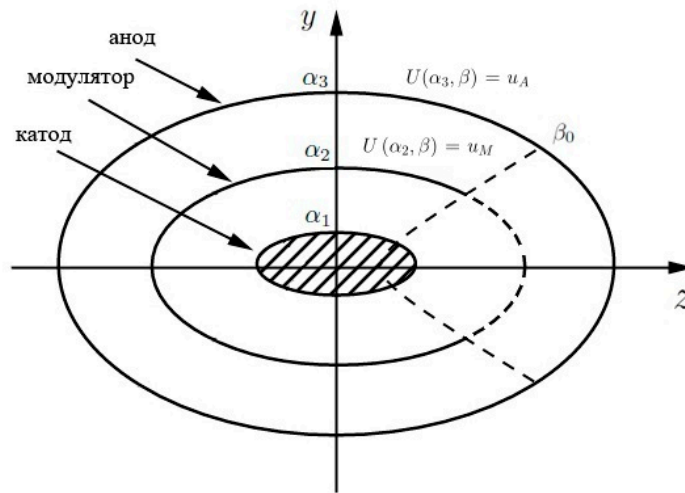


Рис. 4.1. Схематическое изображение эллиптической триодной системы.

Параметры системы:

$\alpha = \alpha_1, \quad \beta \in [0, \pi]$ — поверхность катода;

$\alpha = \alpha_3, \quad \beta \in [0, \pi]$ — поверхность анода;

$\alpha = \alpha_2, \quad \beta \in [\beta_0, \pi]$ — модулятор;

$U(\alpha_1, \beta) = 0$ — значение потенциала на катоде;

$U(\alpha_2, \beta) = u_M, \quad (\beta \in [\beta_0, \pi])$ — значение потенциала на модуляторе;

$U(\alpha_3, \beta) = u_A$ — значение потенциала на аноде.

4.2. Математическая модель триодной системы

Решается задача для распределения электростатического потенциала для острейного катода, поэтому в качестве математической мо-

дели, описывающей данную систему, рассматривается уравнение Лапласа в эллипсоидальных координатах с граничными условиями [11]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U(\alpha, \beta) = 0, \quad \alpha \in [\alpha_1, \alpha_3], \quad \beta \in [0, \pi]; \\ U(\alpha_1, \beta) = 0, \quad \beta \in [0, \pi]; \\ U(\alpha_3, \beta) = u_A, \quad \beta \in [0, \pi]; \\ U(\alpha_2, \beta) = u_M, \quad \beta \in [\beta_0, \pi]; \\ \frac{\partial U}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2-0} = \frac{\partial U}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2+0}, \quad \beta \in [0, \beta_0]; \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Последнее граничное условие является условием непрерывности потенциала на границе раздела областей. Для решения поставленной краевой задачи (4.1) внутреннюю площадь системы можно разделить на две подобласти

$$\mathbf{1} - (\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2], \quad \beta \in [0, \pi]),$$

$$\mathbf{2} - (\alpha \in [\alpha_2, \alpha_3], \quad \beta \in [0, \pi]).$$

Связь между декартовыми координатами и координатами вытянутого эллипсоида вращения определяется формулами [11]

$$\left\{ \begin{array}{l} x = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \cos \varphi, \\ y = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \sin \varphi, \\ z = c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, \end{array} \right. \quad (4.2)$$

где $\alpha \in [0, \infty)$, $\beta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, c — фокальный радиус.

Предполагается, что U не зависит от угла φ (осесимметричная задача). Уравнение Лапласа в координатах вытянутого эллипсоида вращения для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\frac{1}{c^2(\sin^2 \beta + \operatorname{sh}^2 \alpha)} \left[c \operatorname{th} \alpha \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + c \operatorname{tg} \beta \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} \right] = 0. \quad (4.3)$$

4.3. Решение граничной задачи для триодной системы

Представим электростатический потенциал в области 1 ($\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$) и в области 2 ($\alpha \in [\alpha_2, \alpha_3]$) в виде разложений по полиномам Лежандра:

$$\begin{cases} U_1(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) b_n \frac{W_n(\alpha_1, \alpha)}{W_n(\alpha_1, \alpha_2)}, & \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]; \\ U_2(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \left(b_n \frac{W_n(\alpha, \alpha_3)}{W_n(\alpha_2, \alpha_3)} + d_n \frac{W_n(\alpha_2, \alpha)}{W_n(\alpha_2, \alpha_3)} \right), & \alpha \in [\alpha_2, \alpha_3], \end{cases} \quad (4.4)$$

где $W_n(a, b) = P_n(\operatorname{ch} a)Q_n(\operatorname{ch} b) - P_n(\operatorname{ch} b)Q_n(\operatorname{ch} a)$ — собственные функции уравнений,

$P_n(x)$ — полиномы Лежандра, $Q_n(x)$ — функции Лежандра второго рода, получающихся после разделения переменных [18],

b_n, d_n — неизвестные коэффициенты.

Неизвестные коэффициенты d_n были найдены в предыдущих работах [15, 22, 23] и равны

$$d_n = \frac{u_A (-1)^n (4n+3)(2n)!}{2^{2n+1} (n+1)! n!}, \quad n \in [0, \infty].$$

Выполнение граничного условия для потенциала на участке $\alpha = \alpha_2, \beta \in [\beta_0, \pi]$ и условия сшивания производных на участке $\alpha = \alpha_2, \beta \in [0, \beta_0]$ приводят к парным уравнениям [13]

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) b_n B_n = f(\beta), & \beta \in [0, \beta_0]; \\ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) b_n = u_M, & \beta \in [\beta_0, \pi], \end{cases} \quad (4.5)$$

где

$$B_n = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_2} \left(\frac{Q_n(\operatorname{ch} \alpha_3) \overline{K} P_{n+1} - P_n(\operatorname{ch} \alpha_3) \overline{K} Q_{n+1}}{W_n(\alpha_2, \alpha_3)} - \right) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{Q_n(\operatorname{ch} \alpha_3) \overline{K P}_{n+1} - P_n(\operatorname{ch} \alpha_3) \overline{K Q}_{n+1}}{W_n(\alpha_2, \alpha_3)} \Bigg), \\
f(\beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) d_n \frac{P_n(\operatorname{ch} \alpha_1) \overline{K Q}_{n+1} - Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1) \overline{K P}_{n+1}}{\operatorname{ch} \alpha_2 W_n(\alpha_1, \alpha_2)}, \\
\overline{K P}_{n+1} &= P_{n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) - \operatorname{ch} \alpha_2 P_n(\operatorname{ch} \alpha_2), \\
\overline{K Q}_{n+1} &= Q_{n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) - \operatorname{ch} \alpha_2 Q_n(\operatorname{ch} \alpha_2).
\end{aligned}$$

Введём обозначения

$$C_n = \frac{b_n B_n}{n + 1/2}, \quad 1 - g_n = \frac{n + 1/2}{B_n}, \quad (4.7)$$

тогда

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) C_n P_n(\cos \beta) = f(\beta), & \beta \in [0, \beta_0], \\ \sum_{n=0}^{\infty} (1 - g_n) C_n P_n(\cos \beta) = u_M, & \beta \in [\beta_0, \pi]. \end{cases} \quad (4.8)$$

Представим функцию $f(\beta)$ в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$f(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) D_n P_n(\cos \beta),$$

где

$$D_n = \frac{d_n B_n}{n + 1/2}. \quad (4.9)$$

Пусть $C_n - D_n = E_n$, тогда

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) E_n P_n(\cos \beta) = 0, & \beta \in [0, \beta_0], \\ \sum_{n=0}^{\infty} (1 - g_n) E_n P_n(\cos \beta) = F(\beta), & \beta \in [\beta_0, \pi], \end{cases} \quad (4.10)$$

где

$$F(\beta) = u_M - \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) D_n P_n(\cos \beta).$$

Уравнения (4.10) называют парными уравнениями стандартного вида [12]. Парные уравнения рассматриваемого типа могут быть сведены к регулярному интегральному уравнению Фредгольма способом, основанным на использовании следующих разложений некоторых разрывных функций в ряды по полиномам Лежандра [20]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t P_n(\cos \theta) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \theta < \pi, \\ [2(\cos \theta - \cos t)]^{-1/2}, & 0 < \theta < t \leq \pi, \end{cases} \quad (4.11-a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t P_n(\cos \theta) = \begin{cases} [2(\cos t - \cos \theta)]^{-1/2}, & 0 \leq t < \theta < \pi, \\ 0, & 0 < \theta < t \leq \pi. \end{cases} \quad (4.11-б)$$

Разложения (4.11-a), (4.11-б) получены из известных интегральных представлений Малера – Дирихле для полиномов Лежандра ($0 < \theta < \pi$)

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos x)}} dx, \quad (4.12-a)$$

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sqrt{2(\cos x - \cos \theta)}} dx. \quad (4.12-б)$$

Положим неизвестный коэффициент E_n равным

$$E_n = \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt, \quad (4.13)$$

где $\varphi(t)$ — новая неизвестная функция, которая предполагается непрерывно дифференцируемой.

Подставляем выражение (4.13) в первое уравнение (4.8), и в силу (4.11-б) и неравенства $0 < \beta < t \leq \pi$ приходим к тому, что первое уравнение (4.8) удовлетворено тождественно. Теперь подставляем (4.13)

во второе уравнение (4.8), получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (1-g_n) E_n P_n(\cos \beta) &= \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] dt - \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_n(\cos \beta) \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = \\
&= \int_{\beta}^{\pi} \varphi(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] dt - \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_n(\cos \beta) \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = \\
&= \int_{\beta}^{\pi} \varphi(t) \frac{dt}{\sqrt{2(\cos \beta - \cos t)}} - \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_n(\cos \beta) \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = F(\beta).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Здесь интеграл представили в виде суммы двух интегралов, один из которых по формуле (4.11-а) ($0 \leq t < \beta < \pi$) равен нулю:

$$\begin{aligned}
&\int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] dt = \\
&= \int_{\beta_0}^{\beta} \varphi(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] dt + \\
&\quad + \int_{\beta}^{\pi} \varphi(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] dt = \\
&= \int_{\beta}^{\pi} \varphi(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] dt;
\end{aligned} \tag{4.15}$$

и воспользовались (4.11-а) для $0 < \beta < t \leq \pi$.

Перепишем (4.14)

$$\int_{\beta}^{\pi} \varphi(x) \frac{dx}{\sqrt{2(\cos \beta - \cos x)}} - \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_n(\cos \beta) \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = F(\beta) \quad (4.16)$$

Применяя интегральное представление (4.12-а) для (4.16), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\beta}^{\pi} \varphi(x) \frac{dx}{\sqrt{2(\cos \beta - \cos x)}} - \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{2}{\pi} \int_{\beta}^{\pi} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{\sqrt{2(\cos \beta - \cos x)}} dx \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = F(\beta), \\ & \int_{\beta}^{\pi} \left[\varphi(x) - \frac{2}{\pi} \int_{\beta_0}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \varphi(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt \right] \times \\ & \times \frac{dx}{\sqrt{2(\cos \beta - \cos x)}} = F(\beta). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Введём обозначение:

$$G(y) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) y. \quad (4.18)$$

Тогда

$$\begin{aligned} G(t+x) - G(t-x) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) (t+x) \right) - \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) (t-x) \right) = \\ &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} g_n \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Подставляя (4.19) в (4.17), приходим к выражению

$$\int_{\beta}^{\pi} \left[\varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_0}^{\pi} \varphi(t) [G(t+x) - G(t-x)] dt \right] \times \quad (4.20)$$

$$\times \frac{dx}{\sqrt{2(\cos \beta - \cos x)}} = F(\beta).$$

Выражение (4.20) — уравнение Абеля, решением которого в нашем случае является уравнение Фредгольма второго рода [12, 20]:

$$\varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\beta_0}^{\pi} K(x, t) \varphi(t) dt = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^{\pi} \frac{F(\beta) \sin \beta}{\sqrt{2(\cos x - \cos \beta)}} d\beta, \quad x \in (\beta_0, \pi), \quad (4.21)$$

ядро которого имеет вид

$$K(x, t) = G(t-x) - G(t+x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} g_n \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x. \quad (4.22)$$

В случае, когда $F(\beta) = \text{const}$, правая часть уравнения (4.21) значительно упрощается:

$$\varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\beta_0}^{\pi} K(x, t) \varphi(t) dt = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{F(\beta) \sin x}{\sqrt{\cos x + 1}}, \quad x \in (\beta_0, \pi). \quad (4.23)$$

Таким образом, для нахождения неизвестных коэффициентов E_n , а затем и b_n необходимо решить уравнение (4.21) или (4.23) (в случае с нулевыми граничными условиями). Это уравнение может быть решено численно методом последовательных приближений, заменой ядра вырожденным или методом квадратур [21].

5. Моделирование триодной системы методом перекрытия областей

5.1. Физическая постановка задачи для триодной системы на основе полуэллипсоидального полевого катода

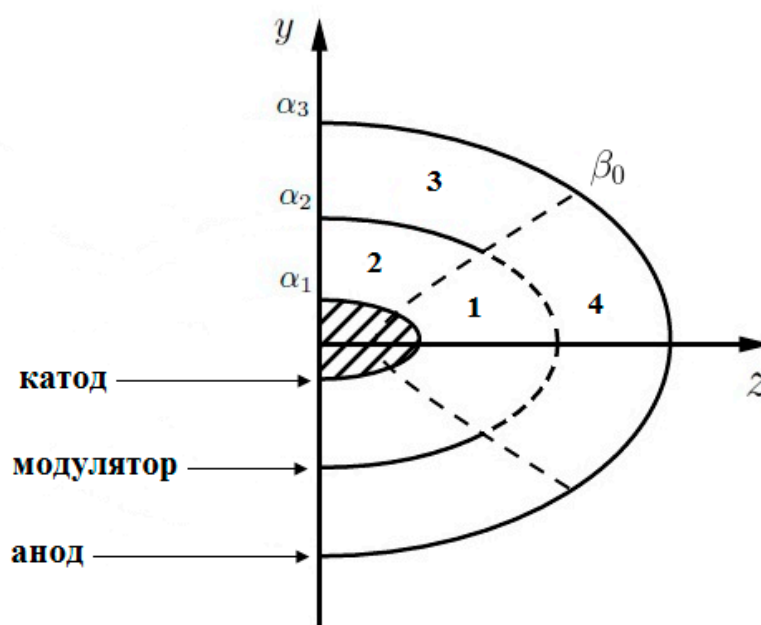


Рис. 5.1. Схематическое изображение эллиптической триодной системы.

Параметры системы:

$\alpha = \alpha_1, \quad \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ — поверхность катода;

$\alpha = \alpha_2, \quad \beta \in \left[\beta_0, \frac{\pi}{2}\right]$ — поверхность модулятора;

$\alpha = \alpha_3, \quad \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ — поверхность анода;

$\alpha \in [\alpha_1, \alpha_3], \quad \beta = \frac{\pi}{2}$ — поверхность плоской подложки;

$U(\alpha_1, \beta) = f_K = 0$ — значение потенциала на катоде;

$U(\alpha_2, \beta) = f_M$ — значение потенциала на модуляторе;

$U(\alpha_3, \beta) = f_A = 0$ — значение потенциала на аноде;

$U(\alpha, \frac{\pi}{2}) = 0$ — потенциал на плоской подложке.

5.2. Математическая модель триодной системы на основе полуэллипсоидального полевого катода

Вся область между катодом и анодом представлена в виде четырёх подобластей. Описание подобластей 1-4:

$$1 — (\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2], \quad \beta \in [0, \beta_0]),$$

$$2 — (\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2], \quad \beta \in [\beta_0, \frac{\pi}{2}]),$$

$$3 — (\alpha \in [\alpha_2, \alpha_3], \quad \beta \in [\beta_0, \frac{\pi}{2}]),$$

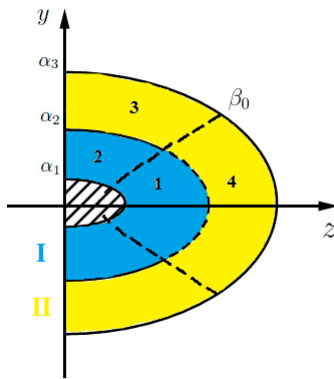
$$4 — (\alpha \in [\alpha_2, \alpha_3], \quad \beta \in [0, \beta_0]).$$

Для нахождения электростатического потенциала вся область между катодом и анодом разбивалась на 3 подобласти (рис. 5.2):

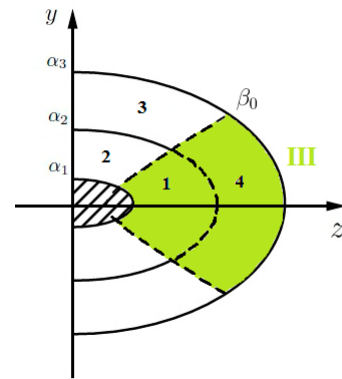
I — подобласти 1 и 2,

II — подобласти 3 и 4,

III — подобласти 1 и 4.



а) Подобласти I и II



б) Подобласть III

Рис. 5.2. Выделение подобластей триодной системы.

Для каждой из подобластей решалось уравнение Лапласа в координатах вытянутого эллипсоида вращения $\Delta U(\alpha, \beta) = 0$ с соответствующими граничными условиями [18, 23]:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_I(\alpha_1, \beta) = 0, \quad \beta \in [0, \frac{\pi}{2}] ; \\ U_I(\alpha, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2] ; \\ U_I(\alpha_2, \beta) = U_{III}(\alpha_2, \beta), \quad \beta \in [0, \beta_0] ; \\ U_I(\alpha_2, \beta) = f_M, \quad \beta \in [\beta_0, \frac{\pi}{2}] ; \end{array} \right. \quad (5.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{II}(\alpha_2, \beta) = U_{III}(\alpha_2, \beta), \quad \beta \in [0, \beta_0] ; \\ U_{II}(\alpha_2, \beta) = f_M, \quad \beta \in [\beta_0, \frac{\pi}{2}] ; \\ U_{II}(\alpha_3, \beta) = 0, \quad \beta \in [0, \frac{\pi}{2}] ; \end{array} \right. \quad (5.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{III}(\alpha_1, \beta) = 0, \quad \beta \in [0, \beta_0] ; \\ U_{III}(\alpha_3, \beta) = 0, \quad \beta \in [0, \beta_0] ; \\ U_{III}(\alpha, \beta_0) = U_I(\alpha, \beta_0), \quad \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2] ; \\ U_{III}(\alpha, \beta_0) = U_{II}(\alpha, \beta_0), \quad \alpha \in [\alpha_2, \alpha_3] ; \end{array} \right. \quad (5.3)$$

5.3. Решение граничной задачи для триодной системы на основе полуэллипсоидального полевого катода

Для решения поставленной граничной задачи был использован метод перекрытия областей [13]. Этот метод используется, когда граничные условия заданы не на всей границе, как например в нашем случае с границей поверхности модулятора $\alpha = \alpha_2$.

При использовании метода перекрытия областей строятся решения для каждой из подобластей и ставятся дополнительные граничные условия.

Подобласть I

Исходя из ранее проведённых исследований, решение в подобласти I имеет вид [15, 22]:

$$U_I(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{2k+1}(\cos \beta) a_{2k+1} \frac{W_{2k+1}(\alpha_1, \alpha)}{W_{2k+1}(\alpha_1, \alpha_2)}, \quad \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]; \quad (5.4)$$

где $W_n(a, b) = P_n(\operatorname{ch} a)Q_n(\operatorname{ch} b) - P_n(\operatorname{ch} b)Q_n(\operatorname{ch} a)$ — собственные функции уравнений [22],

a_{2k+1} — неизвестные коэффициенты.

Подобласть II

Решение в подобласти II находится по формуле [22]

$$U_{II}(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{2k+1}(\cos \beta) a_{2k+1} \frac{W_{2k+1}(\alpha, \alpha_3)}{W_{2k+1}(\alpha_2, \alpha_3)}, \quad \alpha \in [\alpha_2, \alpha_3], \quad (5.5)$$

где a_{2k+1} — неизвестные коэффициенты.

Подобласть III

Общее решение в подобласти III представляется в виде

$$U_{III}(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\nu_n}(\cos \beta) [C_{\nu_n} P_{\nu_n}(\operatorname{ch} \alpha) + D_{\nu_n} Q_{\nu_n}(\operatorname{ch} \alpha)], \quad (5.6)$$

где C_{ν_n}, D_{ν_n} — неизвестные коэффициенты, ν_n — нули функций P_n и Q_n .

Подставляя (5.6) в первые два граничных условия (5.3), получаем систему:

$$\begin{aligned} C_{\nu_n} P_{\nu_n}(\operatorname{ch} \alpha_1) + D_{\nu_n} Q_{\nu_n}(\operatorname{ch} \alpha_1) &= 0, \\ C_{\nu_n} P_{\nu_n}(\operatorname{ch} \alpha_3) + D_{\nu_n} Q_{\nu_n}(\operatorname{ch} \alpha_3) &= 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Система (5.7) имеет ненулевое решение, если её определитель равен нулю. Обозначим определитель системы (5.7) как функцию $H(\alpha_1, \alpha_3, \nu_n)$. Таким образом, имеем условие для нахождения значений ν_n :

$$H(\alpha_1, \alpha_3, \nu_n) = 0, \quad (5.8)$$

где

$$H(a, b, \nu_n) = P_{\nu_n}(\operatorname{ch} a)Q_{\nu_n}(\operatorname{ch} b) - P_{\nu_n}(\operatorname{ch} b)Q_{\nu_n}(\operatorname{ch} a). \quad (5.9)$$

Отыскание нулей функций Лежандра является довольно трудной задачей [24–27]. В представленной работе решению этого вопроса посвящён параграф § 5.4. В настоящем разделе для нахождения неизвестных коэффициентов будем полагать ν_n известными.

Используя систему (5.7), можно привести (5.6) к выражению с одним неизвестным коэффициентом c_n :

$$U_{III}(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{\nu_n}(\cos \beta)}{P_{\nu_n}(\cos \beta_0)} c_n H(\alpha_1, \alpha, \nu_n), \quad (5.10)$$

где $c_n = -C_{\nu_n}/Q_{\nu_n}(\operatorname{ch} \alpha_1)$.

Перепишем условия (5.1)–(5.3) для границы $\beta = \beta_0$ и $\alpha = \alpha_2$ в виде (5.11-а) и (5.11-б) соответственно

$$U_{III}(\alpha, \beta_0) = \begin{cases} U_I(\alpha, \beta_0), & \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \\ U_{II}(\alpha, \beta_0), & \alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_3, \end{cases} \quad (5.11-а)$$

$$U_I(\alpha_2, \beta) = U_{II}(\alpha_2, \beta) = \begin{cases} U_{III}(\alpha_2, \beta), & 0 \leq \beta \leq \beta_0, \\ f_M, & \beta_0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (5.11-б)$$

Подставляя общие решения для областей I, II и III (5.4), (5.5) и (5.10) в переписанные граничные условия (5.11-а), (5.11-б), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n H(\alpha_1, \alpha, \nu_n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} P_{2k+1}(\cos \beta_0) a_{2k+1} \frac{W_{2k+1}(\alpha_1, \alpha)}{W_{2k+1}(\alpha_1, \alpha_2)}, & \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \\ \sum_{k=0}^{\infty} P_{2k+1}(\cos \beta_0) a_{2k+1} \frac{W_{2k+1}(\alpha, \alpha_3)}{W_{2k+1}(\alpha_2, \alpha_3)}, & \alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_3, \end{cases} \quad (5.12-а)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} P_{2k+1}(\cos \beta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} P_{\nu_n}(\cos \beta) c_n H(\alpha_1, \alpha_2, \nu_n), & 0 \leq \beta \leq \beta_0, \\ f_M, & \beta_0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (5.12-б)$$

Граница $\beta = \beta_0, \quad \alpha \in [\alpha_1, \alpha_3]$

Производилось умножение (5.12-а) на $\text{sh}(\alpha)H(\alpha_1, \alpha, \nu_n)$ и интегрирование по аргументу α в пределах $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_3]$:

$$\begin{aligned}
c_n \int_{\alpha_1}^{\alpha_3} \text{sh}(\alpha) H^2(\alpha_1, \alpha, \nu_n) d\alpha &= \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \frac{P_{2k+1}(\cos \beta_0)}{W_{2k+1}(\alpha_1, \alpha_2)} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \text{sh}(\alpha) H(\alpha_1, \alpha, \nu_n) W_{2k+1}(\alpha_1, \alpha) d\alpha + \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \frac{P_{2k+1}(\cos \beta_0)}{W_{2k+1}(\alpha_2, \alpha_3)} \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \text{sh}(\alpha) H(\alpha_1, \alpha, \nu_n) W_{2k+1}(\alpha, \alpha_3) d\alpha.
\end{aligned} \quad (5.13)$$

Пользуясь ортогональностью функции $H(\alpha_1, \alpha, \nu_n)$, получаем

$$\begin{aligned}
c_n \int_{\text{ch } \alpha_1}^{\text{ch } \alpha_3} H^2(\alpha_1, \alpha, \nu_n) d(\text{ch } \alpha) &= \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \frac{P_{2k+1}(\cos \beta_0)}{W_{2k+1}(\alpha_1, \alpha_2)} \int_{\text{ch } \alpha_1}^{\text{ch } \alpha_2} H(\alpha_1, \alpha, \nu_n) W_{2k+1}(\alpha_1, \alpha) d(\text{ch } \alpha) + \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \frac{P_{2k+1}(\cos \beta_0)}{W_{2k+1}(\alpha_2, \alpha_3)} \int_{\text{ch } \alpha_2}^{\text{ch } \alpha_3} H(\alpha_1, \alpha, \nu_n) W_{2k+1}(\alpha, \alpha_3) d(\text{ch } \alpha),
\end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \left[\frac{P_{2k+1}(\cos \beta_0)}{W_{2k+1}(\alpha_1, \alpha_2)} \int_{\text{ch } \alpha_1}^{\text{ch } \alpha_2} H(\alpha_1, \alpha, \nu_n) W_{2k+1}(\alpha_1, \alpha) d(\text{ch } \alpha) + \right. \\
\left. + \frac{P_{2k+1}(\cos \beta_0)}{W_{2k+1}(\alpha_2, \alpha_3)} \int_{\text{ch } \alpha_2}^{\text{ch } \alpha_3} H(\alpha_1, \alpha, \nu_n) W_{2k+1}(\alpha, \alpha_3) d(\text{ch } \alpha) \right] - \\
-c_n \int_{\text{ch } \alpha_1}^{\text{ch } \alpha_3} H^2(\alpha_1, \alpha, \nu_n) d(\text{ch } \alpha) = 0.
\end{aligned} \quad (5.15)$$

Граница $\alpha = \alpha_2, \quad \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Производилось умножение (5.12-б) на $\sin(\beta)P_t(\cos \beta)$ и интегрирование по аргументу β в пределах $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} a_{2k+1} \sin(\beta) P_t(\cos \beta) P_{2k+1}(\cos \beta) d\beta = f_M \int_{\beta_0}^{\pi/2} \sin(\beta) P_t(\cos \beta) d\beta + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} c_n H(\alpha_1, \alpha_2, \nu_n) \int_0^{\beta_0} \sin(\beta) P_t(\cos \beta) P_{\nu_n}(\cos \beta) d\beta. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Пользуясь свойством ортогональности полиномов Лежандра [16] при $t = 2k + 1$, получаем

$$\begin{aligned} a_{2k+1} \frac{4k+3}{4} = f_M \int_0^{\cos \beta_0} P_{2k+1}(\cos \beta) d(\cos \beta) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} c_n H(\alpha_1, \alpha_2, \nu_n) \int_{\cos \beta_0}^1 P_{2k+1}(\cos \beta) P_{\nu_n}(\cos \beta) d(\cos \beta), \end{aligned} \quad (5.17)$$

Перенесём слагаемые с неизвестными коэффициентами в одну часть:

$$\begin{aligned} a_{2k+1} \frac{4k+3}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \underline{c_n} H(\alpha_1, \alpha_2, \nu_n) \int_{\cos \beta_0}^1 P_{2k+1}(\cos \beta) P_{\nu_n}(\cos \beta) d(\cos \beta) = \\ = f_M \int_0^{\cos \beta_0} P_{2k+1}(\cos \beta) d(\cos \beta). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Выражения (5.15) и (5.18) образуют СЛАУ $Ax = b$ для нахождения неизвестных коэффициентов, где

$$x = (a_1 \ a_3 \ a_5 \ \dots \ a_K \ c_1 \ c_2 \ c_3 \ \dots \ c_N)^T, \quad (5.19)$$

A=

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 0 & \dots & 0 & \tilde{C}_2(1,1) & \tilde{C}_2(1,2) & \dots & \tilde{C}_2(1,N) \\ 0 & 7/4 & \dots & 0 & \tilde{C}_2(3,1) & \tilde{C}_2(3,2) & \dots & \tilde{C}_2(3,N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (2K+1)/4 & \tilde{C}_2(K,1) & \tilde{C}_2(K,2) & \dots & \tilde{C}_2(K,N) \\ \tilde{A}(1,1) & \tilde{A}(3,1) & \dots & \tilde{A}(K,1) & -\tilde{C}_1(1) & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{A}(1,2) & \tilde{A}(3,2) & \dots & \tilde{A}(K,2) & 0 & -\tilde{C}_1(2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}(1,N) & \tilde{A}(3,N) & \dots & \tilde{A}(K,N) & 0 & 0 & \vdots & -\tilde{C}_1(N) \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

$$b = \begin{pmatrix} f_M \int_0^{\cos \beta_0} P_1(\cos \beta) d(\cos \beta) \\ f_M \int_0^{\cos \beta_0} P_3(\cos \beta) d(\cos \beta) \\ \vdots \\ f_M \int_0^{\cos \beta_0} P_K(\cos \beta) d(\cos \beta) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Здесь $i = 2k + 1 = 1, 3, 5, \dots, K$; $n = 1, 2, 3, \dots, N$.

Обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(i, n) &= \frac{P_i(\cos \beta_0)}{W_i(\alpha_1, \alpha_2)} \int_{\text{ch } \alpha_1}^{\text{ch } \alpha_2} H(\alpha_1, \alpha, \nu_n) W_i(\alpha_1, \alpha) d(\text{ch } \alpha) + \\ &+ \frac{P_i(\cos \beta_0)}{W_i(\alpha_2, \alpha_3)} \int_{\text{ch } \alpha_2}^{\text{ch } \alpha_3} H(\alpha_1, \alpha, \nu_n) W_i(\alpha, \alpha_3) d(\text{ch } \alpha), \quad (5.22) \\ \tilde{C}_1(n) &= \int_{\text{ch } \alpha_1}^{\text{ch } \alpha_3} H^2(\alpha_1, \alpha, \nu_n) d(\text{ch } \alpha), \end{aligned}$$

$$\tilde{C}_2(i, n) = -H(\alpha_1, \alpha_2, \nu_n) \int_{\cos \beta_0}^1 P_i(\cos \beta) P_{\nu_n}(\cos \beta) d(\cos \beta).$$

5.4. Исследование нулей функций Лежандра

В ходе решения граничной задачи (5.1)–(5.3) возникла необходимость отыскания значений ν_n из условия:

$$H(\alpha_1, \alpha_3, \nu_n) = 0, \quad (5.23)$$

где

$$H(a, b, \nu_n) = P_{\nu_n}(\operatorname{ch} a) Q_{\nu_n}(\operatorname{ch} b) - P_{\nu_n}(\operatorname{ch} b) Q_{\nu_n}(\operatorname{ch} a).$$

Функции Лежандра часто встречаются при решении задач математической физики. Проблема нахождения нулей функций Лежандра так же не редко поднимается в теории поля [24–27].

В случае (5.23) на степень не накладываются никакие дополнительные условия, значит будем считать, что ν_n — комплексное число.

В работах, посвящённых исследованию комбинаций из функций Лежандра, представляют ν_n в виде [25–27]

$$\nu_n = -\frac{1}{2} + i n. \quad (5.24)$$

На рисунке 5.3 представлен график функции $H(\alpha_1, \alpha_3, \nu_n)$.

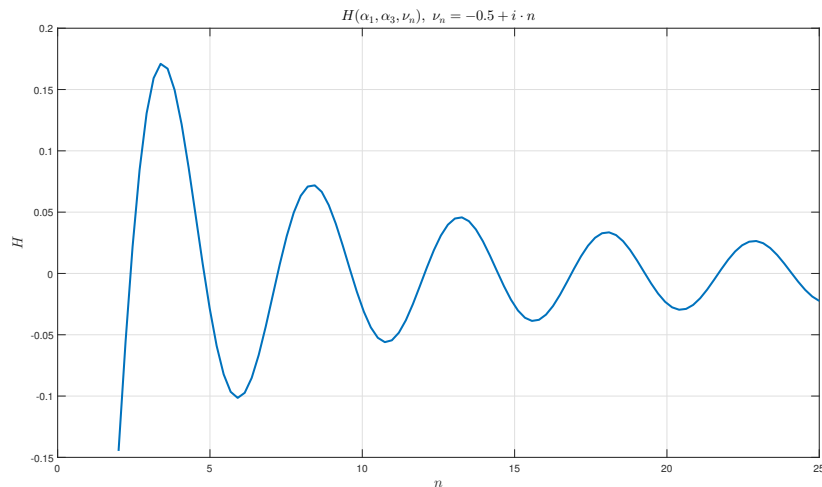


Рис. 5.3. График функции $H(\alpha_1, \alpha_3, \nu_n)$, где $\nu_n = -\frac{1}{2} + i n$.

Параметры построения графика (рис. 5.3):

$z_1 = 1$ ($\alpha_1 = 0.7$) — большая полуось катода,

$z_3 = 3$ ($\alpha_3 = 1.9$) — большая полуось анода,

$m = 100$ — разбиение по $n \in [0; 25]$.

Значения n при которых график (рис. 5.3) пересекает ось абсцисс и определяют значения нулей (5.24) для функции $H(\alpha_1, \alpha_3, \nu_n)$. На рис. 5.3 представлены первые 10 значений ν_n для (5.23).

6. Результаты численных расчётов

Для получения числовых значений потенциала и модуля напряжённости электростатического поля использовался пакет прикладных программ MATLAB с библиотеками, поддерживающими расчёт полиномов Лежандра (`mlpn`) и функций Лежандра второго рода (`mlqna`).

Визуализация аналитических результатов была проведена для диодной системы с катодом формы полуэллипсоида вращения (глава 2).

6.1. Расчёт электростатического потенциала

Значения потенциала между катодом и анодом найдены по формуле (2.5) с неизвестным коэффициентом (2.17). В результате работы программы построены графики электростатического потенциала диодной системы (рис. 6.1, 6.2 и 6.3) с параметрами, представленными ниже.

Параметры системы:

$z_1 = 1$ — большая полуось катода,

$z_2 = 2$ — большая полуось анода,

$c = 0.8$ — фокальный радиус,

β_0 — параметр, отвечающий за размер поверхности анода с ненулевыми граничными условиями,

$N = 200$ — максимальная степень полиномов Лежандра,

$u_0 = 100$ — значение потенциала на аноде.

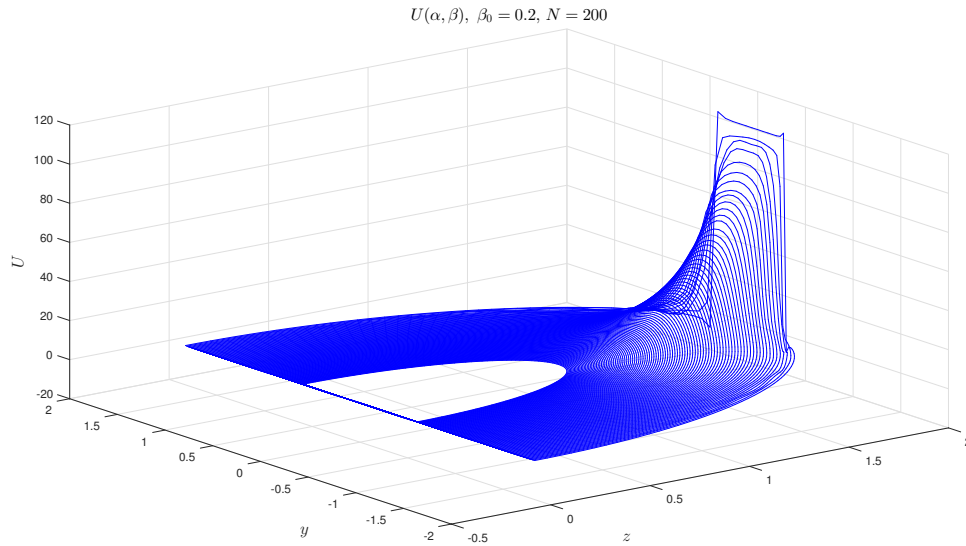


Рис. 6.1. График электростатического потенциала диодной системы ($\beta_0 = 0.2$).

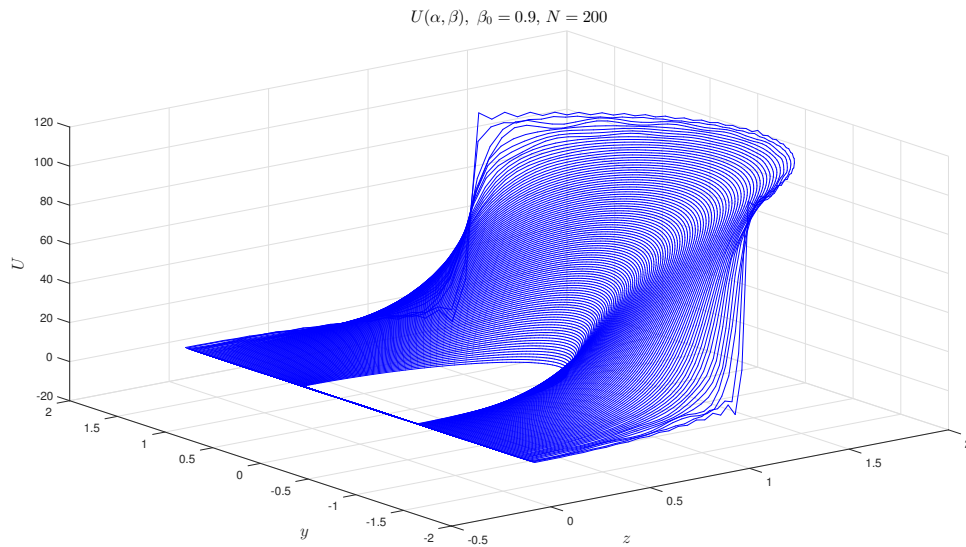


Рис. 6.2. График электростатического потенциала диодной системы ($\beta_0 = 0.9$).

Исходя из рассмотрения построенных графиков (рис. 6.1, 6.2 и 6.3) можно утверждать, что все граничные условия (2.3) соблюдены. Построенные графики совпадают с качественно ожидаемым распределением потенциала, что доказывает правильную постановку и решение задачи.

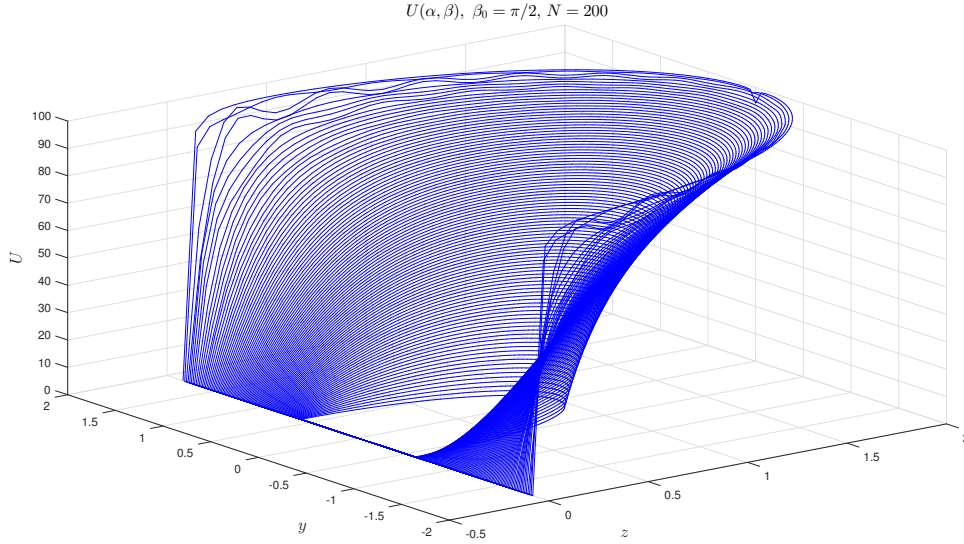


Рис. 6.3. График электростатического потенциала диодной системы ($\beta_0 = \pi/2$).

6.2. Расчёт напряжённости

Модуль напряжённости электростатического поля определяется формулой [11]

$$|E| = \sqrt{\left(\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial U}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_\beta} \frac{\partial U}{\partial \beta}\right)^2}, \quad (6.1)$$

где $h_\alpha = h_\beta = c\sqrt{\sin^2 \beta + \text{sh}^2 \alpha}$ — метрические коэффициенты.

Подставляя (2.5) в выражение (6.1) и пользуясь формулами для производных полиномов Лежандра (аналогичная формула для Q) [19]

$$\frac{dP_\nu(z)}{dz} = \frac{\nu + 1}{z^2 - 1} [P_{\nu+1}(z) - zP_\nu(z)] \quad (6.2)$$

получаем

$$|E| = \frac{1}{c\sqrt{\sin^2 \beta + \text{sh}^2 \alpha}} \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)^2}, \quad (6.3)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n+1}{\text{sh} \alpha} P_n(\cos \beta) \frac{P_n(\text{ch} \alpha_1) \overline{KQ}_{n+1}(\text{ch} \alpha) - Q_n(\text{ch} \alpha_1) \overline{KP}_{n+1}(\text{ch} \alpha)}{W_n(\alpha_1, \alpha_2)}, \\ \frac{\partial U}{\partial \beta} &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n+1}{\sin \beta} \left[\cos \beta P_n(\cos \beta) - P_{n+1}(\cos \beta) \right] \frac{W_n(\alpha_1, \alpha)}{W_n(\alpha_1, \alpha_2)}, \end{aligned}$$

обозначения [23]:

$$W_n(a, b) = P_n(\operatorname{ch} a)Q_n(\operatorname{ch} b) - P_n(\operatorname{ch} b)Q_n(\operatorname{ch} a),$$

$$\overline{K}P_{n+1}(\operatorname{ch} \alpha) = P_{n+1}(\operatorname{ch} \alpha) - \operatorname{ch} \alpha P_n(\operatorname{ch} \alpha),$$

$$\overline{K}Q_{n+1}(\operatorname{ch} \alpha) = Q_{n+1}(\operatorname{ch} \alpha) - \operatorname{ch} \alpha Q_n(\operatorname{ch} \alpha).$$

Значения модуля напряжённости электростатического поля между катодом и анодом найдены по формуле (6.3) с найденным неизвестным коэффициентом (2.17) для системы с параметрами.

Параметры системы:

$z_1 = 1$ — большая полуось катода,

$z_2 = 2$ — большая полуось анода,

$c = 0.8$ — фокальный радиус,

$N = 50$ — максимальная степень полиномов и функций Лежандра,

$u_0 = 100$ — значение потенциала на аноде.

В результате работы программы построены следующие графики напряжённости (рис. 6.4).

На рис. 6.4 (а) представлен график модуля напряжённости электростатического поля диодной системы вблизи острия с параметром $\beta_0 = 0.9$.

Из графика видно, что самое большое значение $|E|$ принимает на вершине острия.

Рис. 6.4 (b) представляет собой зависимость модуля напряжённости на вершине катода от параметра β_0 . Параметр $\beta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Данный график отображает тот факт, что с увеличением поверхности анода с ненулевым граничным условием u_0 растёт и напряжённость электростатического поля.

На рис. 6.4 (с) представлен график зависимости модуля напряжённости от β вблизи катода, где $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Параметр $\beta_0 = 0.9$.

Из графика видно, что самое большое значение $|E|$ принимает на вершине острия, это свойство и является основополагающим при построении микро- и нанoeлектрических острийных систем [1].

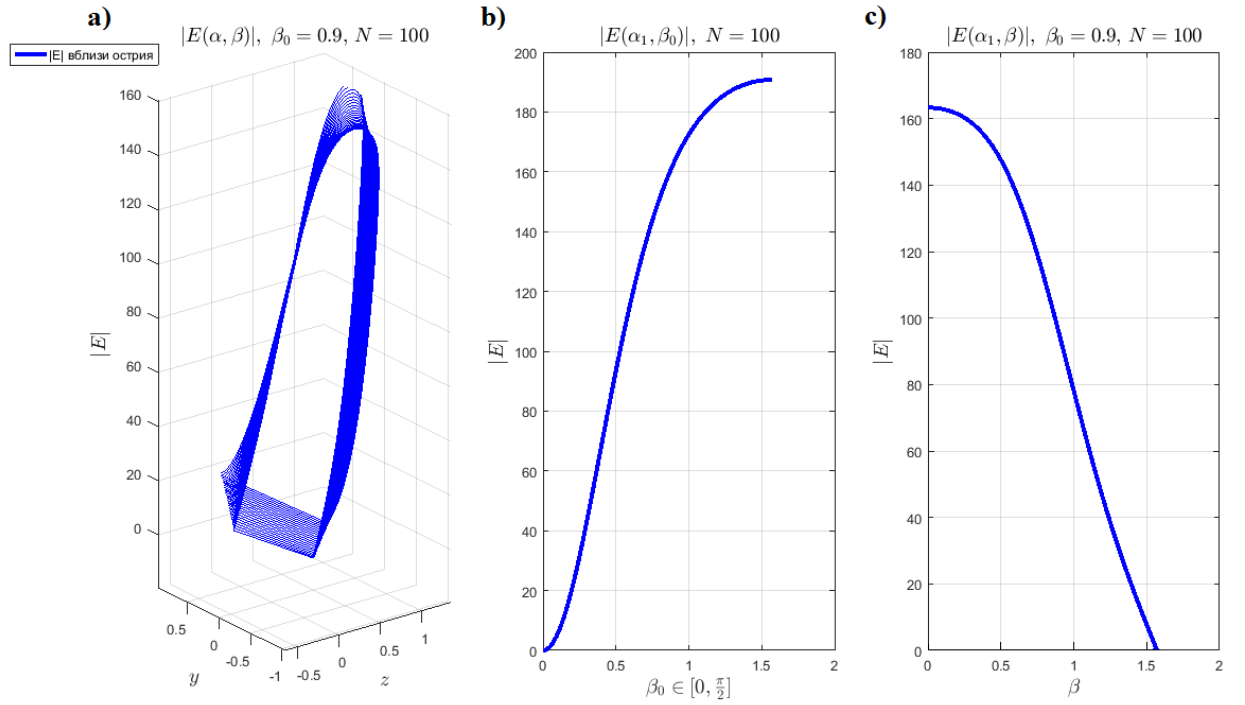


Рис. 6.4. (а) График модуля напряжённости электростатического поля диодной системы вблизи острия. (б) График зависимости модуля напряжённости на вершине катода от параметра β_0 . (с) График значения модуля напряжённости вблизи катода при удалении от острия.

На рисунках (6.5)–(6.7) представлены графики $|E(z_1)|$ для разных значений фокальных радиусов $c = 0.5, 0.8, 1.5$. Параметры системы, для которой производились расчёты представлены ниже.

Параметры системы:

$z_1 \in [c, z_2]$ — большая полуось катода,

$z_2 = 2$ — большая полуось анода,

c — фокальный радиус,

$\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ — на всей поверхности анода значение потенциала u_0 ,

$\beta = 0$ — вершина острия,

$N = 100$ — максимальная степень полиномов Лежандра,

$u_0 = 100$ — значение потенциала на аноде.

Увеличение фокального радиуса c позволяет смоделировать более острый катод, для которого увеличивается максимальное значение напряжённости. Так при $c = 0.5$ $E_{max} = 1.8 \cdot 10^4$, $c = 0.8$ $E_{max} = 3.5 \cdot 10^4$ и при $c = 1.5$ $E_{max} = 6 \cdot 10^4$.

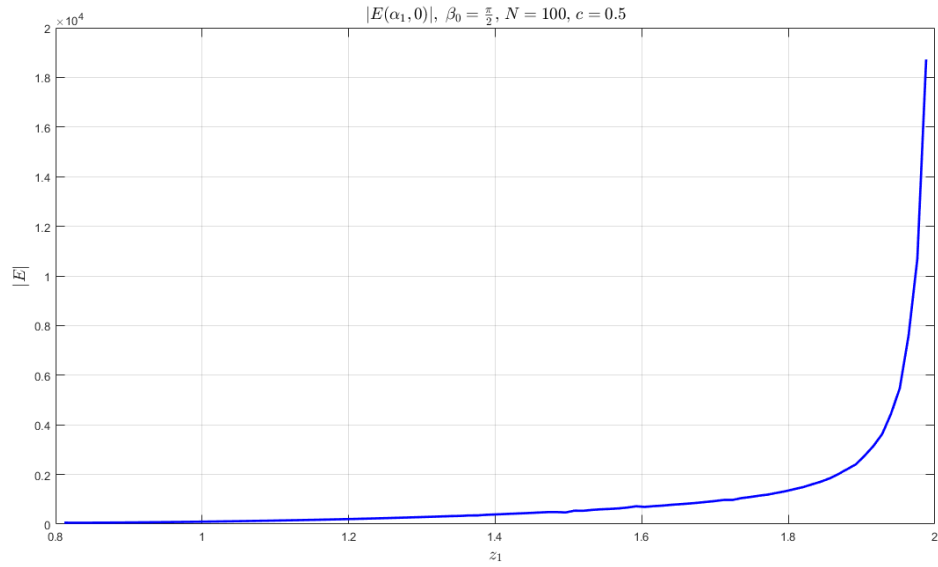


Рис. 6.5. Зависимость $|E|$ на вершине острия от размера катода z_1 , $c = 0.5$.

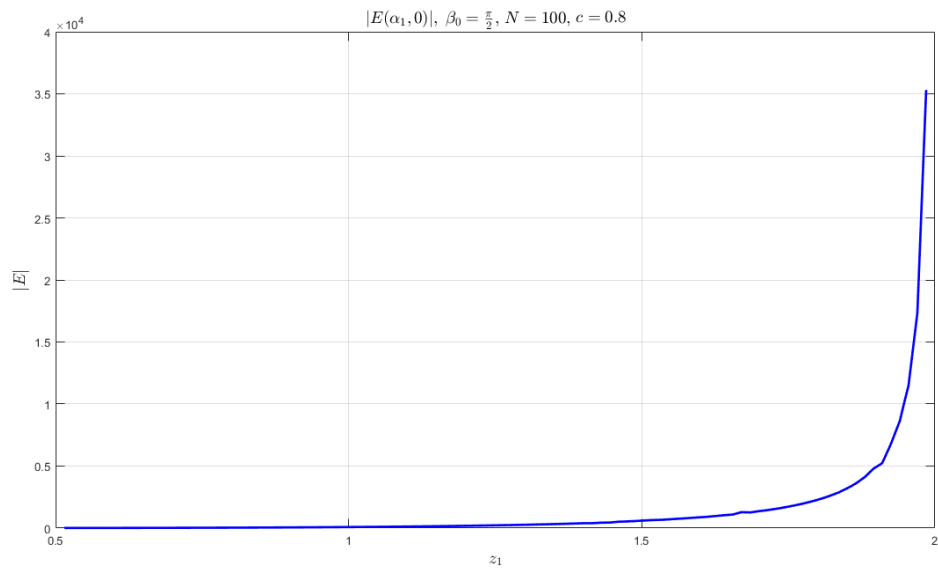


Рис. 6.6. Зависимость $|E|$ на вершине острия от размера катода z_1 , $c = 0.8$.

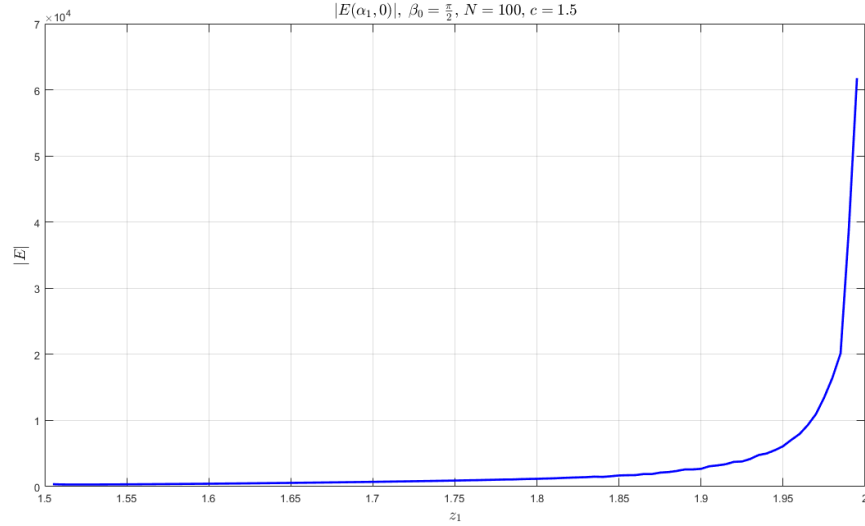


Рис. 6.7. Зависимость $|E|$ на вершине острия от размера катода z_1 , $c = 1.5$.

При уменьшении расстояния между катодом и анодом (при $z_1 \uparrow$) напряжённость возрастает [3]. Из графиков (рис. 6.5, 6.6 и 6.7) видно, что добившись необходимой остроты катода за счёт уменьшения расстояния между электродами можно получить поле, напряжённостью порядка 10^4 (для рассмотренных параметров системы) вблизи вершины острия. Резкое увеличение напряжённости возникает только в непосредственной близости катода и анода, чего на практике добиться довольно трудно [1, 3]. Поэтому при работе с явлением автоэлектронной эмиссии пользуются свойством резкого роста напряжённости вблизи самого острия (рис. 6.8).

На рисунке 6.8 представлен график $|E(z_1)|$. Параметры системы, для которой производились расчёты представлены ниже.

Параметры системы:

$z_1 \in [c, 1.3]$ — большая полуось катода,

$z_2 = 2$ — большая полуось анода,

$c = 0.8$ — фокальный радиус,

$\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ — на всей поверхности анода значение потенциала u_0 ,

$\beta = 0$ — вершина острия,

$N = 100$ — максимальная степень полиномов Лежандра,

$u_0 = 100$ — значение потенциала на аноде.

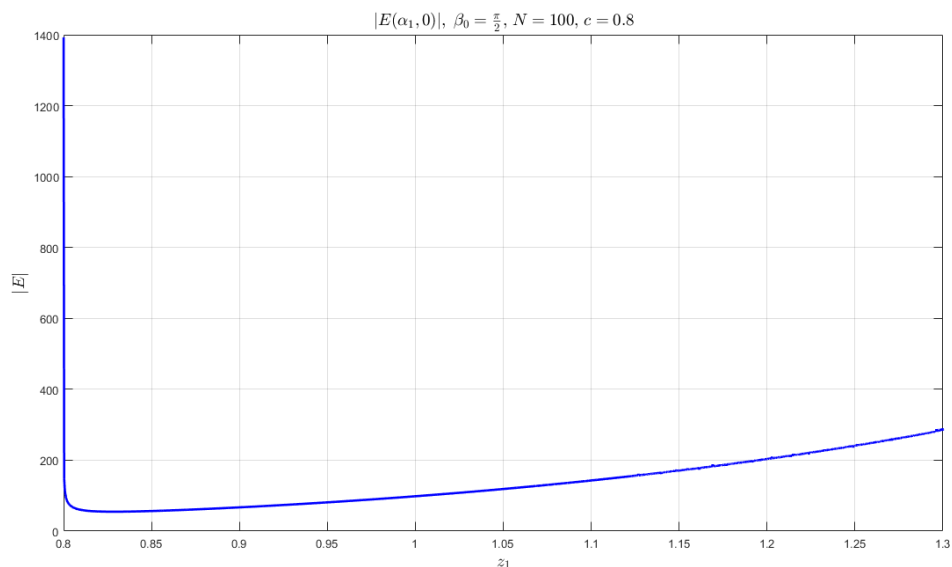


Рис. 6.8. Зависимость $|E|$ от размера катода z_1 на вершине острия, $c = 0.8$.

На рисунке 6.9 представлен график $\ln |E(z_1)|$. Расчёты производились для системы с параметрами.

Параметры системы:

$z_1 \in [c, 0.80001]$ — большая полуось катода,

$z_2 = 2$ — большая полуось анода,

$c = 0.8$ — фокальный радиус,

$\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ — на всей поверхности анода значение потенциала u_0 ,

$\beta = 0$ — вершина острия,

$N = 100$ — максимальная степень полиномов Лежандра,

$u_0 = 100$ — значение потенциала на аноде.

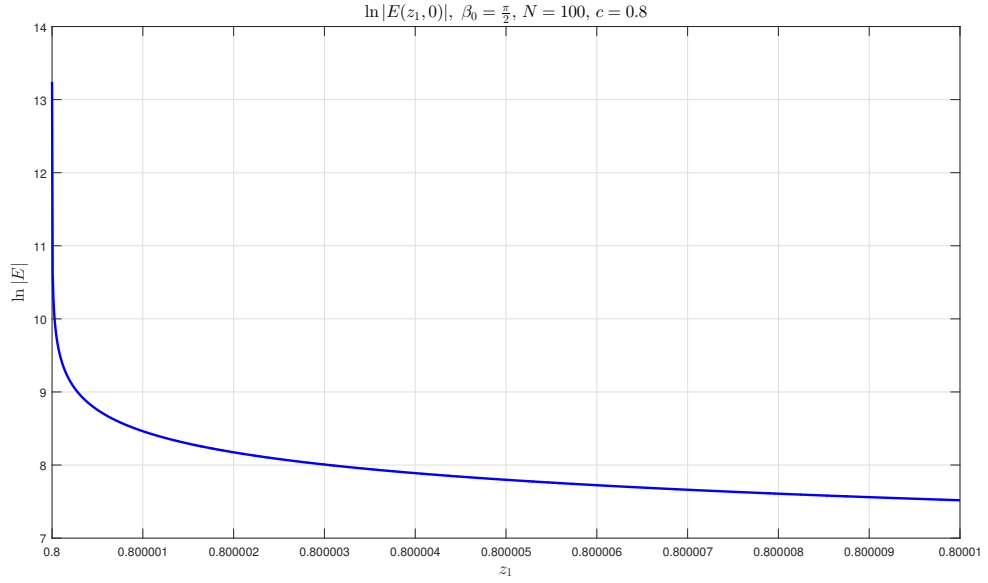


Рис. 6.9. Зависимость $\ln E$ на вершине острия от z_1 , $c = 0.8$.

6.3. Исследование параметров острия

Эмиссионные системы, рассмотренные в данной работе, имеют вид полуэллипсоидов и эллипсоидов вращения. Поэтому параметрами острия являются параметры эллипса: большая a (длина катода z_1) и малая полуоси b , фокальный радиус c .

Кроме перечисленных параметров можно определить ещё одну характеристику острия: радиус кривизны вершины R , который может быть найден по формуле [30]:

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}. \quad (6.4)$$

Связь между декартовыми координатами и координатами вытянутого эллипсоида вращения определяется формулами [11]

$$\begin{cases} x = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \cos \varphi, \\ y = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \sin \varphi, \\ z = c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, \end{cases} \quad (6.5)$$

где $\alpha \in [0, \infty)$, $\beta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, c — фокальный радиус.

Так как поставленные в данной работе задачи являются осесимметричными, то рассматриваются плоские задачи с координатами

$$\begin{cases} y = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta, \\ z = c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta. \end{cases} \quad (6.6)$$

Для эллипса с координатами (6.6) формула радиуса кривизны на вершине острия будет иметь вид

$$R = \frac{c \operatorname{sh}^2 \alpha_1}{\operatorname{ch} \alpha_1}, \quad (6.7)$$

где $\alpha_1 = \ln(z_1/c) + \sqrt{(z_1/c)^2 - 1}$, z_1 — длина острия (большая полуось эллипса).

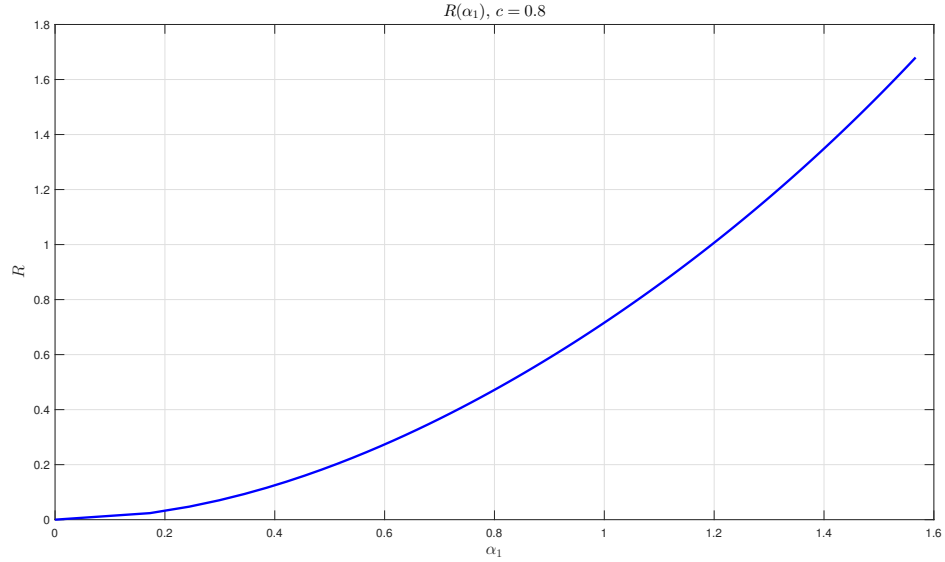


Рис. 6.10. Зависимость R на вершине острия от α_1 , $c = 0.8$.

На рис. 6.10 представлен график зависимости радиуса кривизны R от параметра α_1 при $c = 0.8$. Из графика видно, что чем ближе вершина острия к фокальному радиусу, тем меньше радиус кривизны. На рис. 6.11 изображён график зависимости логарифма кривизны $\ln K$ от параметра z_1 при $c = 0.8$. Кривизна характеризует степень искривления кривой вблизи данной точки и имеет связь с радиусом кривизны [10]:

$$K = \frac{1}{R}. \quad (6.8)$$

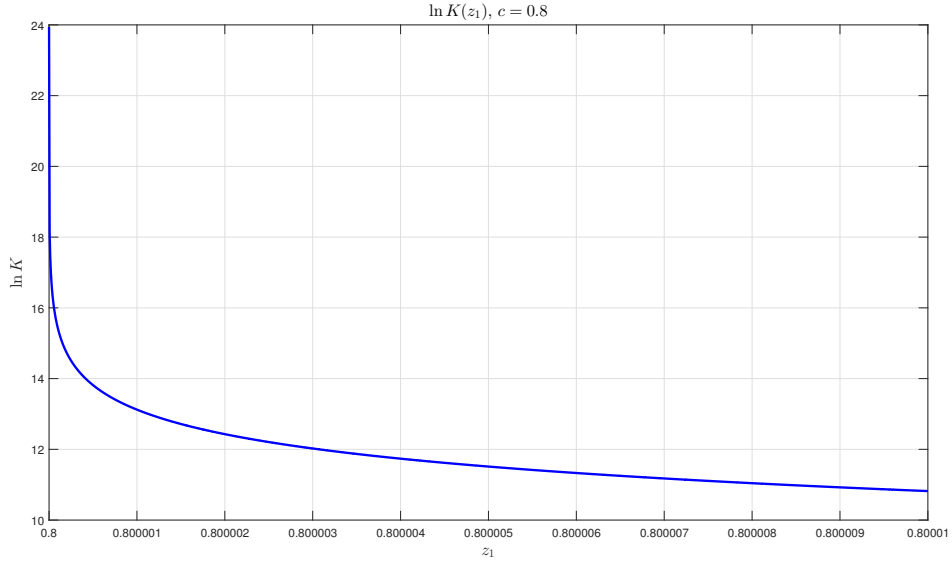


Рис. 6.11. Зависимость $\ln K$ на вершине острия от z_1 , $c = 0.8$.

6.4. Расчёт плотности тока

Процесс автоэлектронной эмиссии был качественно описан теорией Фаулера-Нордгема в 1928 году [3]. Теория представляет формулу расчёта плотности тока в зависимости от напряжённости электрического поля.

Уравнение Фаулера — Нордгейма [1]:

$$j = \frac{e^3 E^2}{8\pi h \Phi t^2(y)} \exp \left[- \frac{8\pi (2m)^{1/2} \Phi^{3/2}}{3heE} \Theta(y) \right], \quad (6.9)$$

где j — плотность эмиссионного тока, e — заряд электрона, m — масса электрона, E — напряжённость электрического поля, h — постоянная Планка, Φ — работа выхода, значения функций $t(y)$ и $\Theta(y)$ табулированы и представлены в ряде работ [3, 28]. Для данного исследования были взяты следующие значения: $\Theta^2(y) \approx 1.1$; $t(y) \approx 0.95 - y^2$; $y = e^3 E \Phi^{-1}$ [29].

Обязательным условием для протекания полевой эмиссии является равенство значений напряжённости на острие $\sim 10^{7-9}$ В/см [1, 31]. Для достижения таких значений напряжённости были выбраны следующие параметры системы.

Параметры системы:

$z_1 \in [c, 0.80001]$ см — большая полуось катода,

$z_2 = 3$ см — большая полуось анода,

$c = 0.8$ см — фокальный радиус,

$\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ — на всей поверхности анода значение потенциала u_0 ,

$N = 100$ — максимальная степень полиномов Лежандра,

$u_0 = 10^7$ В — значение потенциала на аноде,

$m = 9.10953 \cdot 10^{-28}$ г — масса электрона,

$e = 4.8032 \cdot 10^{-10}$ СГС — заряд электрона,

$\Phi = 4.5$ эВ — работа выхода,

$h = 6.626176 \cdot 10^{-27}$ эрг·с — постоянная Планка [32].

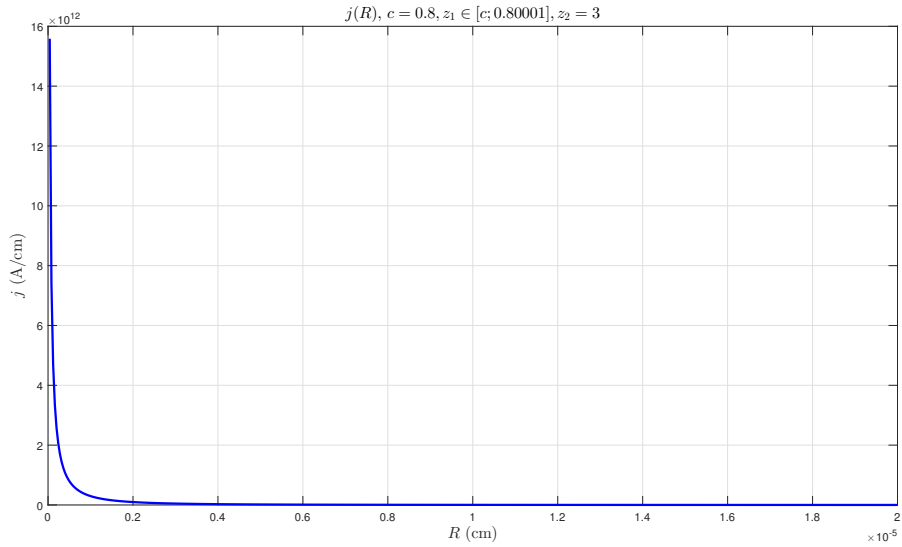


Рис. 6.12. Зависимость j на вершине острия от R .

На рисунке 6.12 представлен график зависимости плотности тока от радиуса кривизны острия $j(R)$. Таким образом, при радиусе кривизны порядка ~ 10 нм можно получить плотность тока порядка $\sim 10^{12}$ В/см.

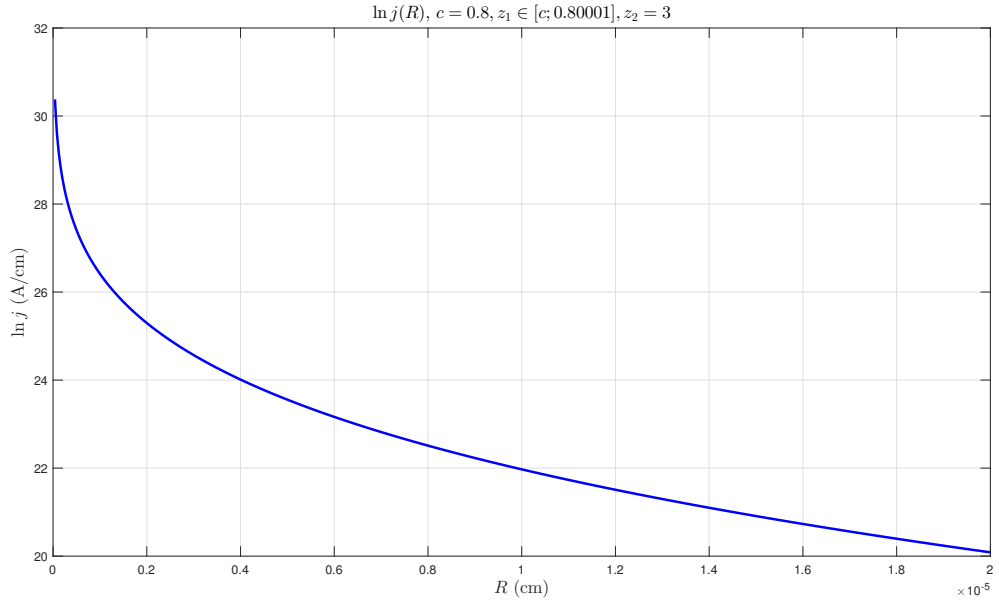


Рис. 6.13. Зависимость $\ln j$ на вершине острия от R .

На рис. 6.13 изображён график зависимости логарифма плотности тока $\ln j$ от радиуса кривизны R при предложенных параметрах системы.

6.5. Сравнение методов

Решение граничной задачи для триодных систем было произведено с помощью метода парных сумматорных уравнений (глава 3 и глава 4) и метода перекрытия областей (глава 5).

Метод перекрытия областей является распространённым методом, применяющимся для решения краевых задач с граничными условиями, заданными на части границы [7, 13].

В процессе решения граничной задачи для рассматриваемой триодной системы метод перекрытия областей оказался довольно трудоёмким и потребовал дополнительных исследований нахождения нулей функций Лежандра (§ 5.4).

Метод парных сумматорных уравнений, реже используется на практике. Если получаемые в ходе исследования данным методом решения представляют вид бесконечных рядов или интегральных разложений, то парные уравнения сводятся либо к интегральным уравнениям,

либо к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений [12]. При этом необходимый математический аппарат значительно усложняется. В данной работе решение представлялось в виде бесконечных рядов, которые сводились к интегральному уравнению Фредгольма второго рода (§ 3.3, § 4.3).

Таким образом, при исследовании триодных систем, подобным рассматриваемой в главах 3 и 4, целесообразней пользоваться методом парных сумматорных уравнений.

Заключение

1. В работе представлены физическая и математическая модели диодной системы полевого острья, состоящего из катода и анода формы полуэллипсоидов вращения.
2. Найдено распределение электрического потенциала в виде разложения по полиномам Лежандра (2.5) для модели диодной системы с граничными условиями (2.3).
3. Рассмотрены физические и математические модели триодных систем с модулятором на основе острийного полевого катода с нулевыми и ненулевыми граничными условиями.
4. Разработаны алгоритмы для нахождения распределения электрического потенциала для триодных систем с граничными условиями (3.2) и (4.1).
5. Построен алгоритм для нахождения электрического потенциала для триодной системы с граничными условиями (5.1)–(5.3).
6. Предложены параметры диодной системы с кусочно-постоянными граничными условиями на аноде.

Данное исследование, посвящённое математическому моделированию эмиссионных систем с эллипсоидальным катодом, показало необходимость использования таких специальных функций как полиномы Лежандра и функции Лежандра. Представление полевого острья в виде эллипсоида вращения даёт возможность использования специальных координат (координаты вытянутого эллипсоида вращения), которые упрощают решение задачи.

При решении задач был использован метод разделения переменных для уравнения Лапласа в координатах вытянутого эллипсоида вращения, метод парных сумматорных уравнений, содержащих полиномы Лежандра и метод перекрытия областей.

Список литературы

- [1] Фурсей Г. Н. Автоэлектронная эмиссия // Соросовский образовательный журнал. 2000. Т. 6. № 11. С. 96–103.
- [2] Трубецков Д. И., Краснова Г. М. О современном состоянии сверхвысокочастотных вакуумных электронных и микроэлектронных приборов с управляемой эмиссией // Изв. вузов «ПНД». 2013. Т. 21. № 1. С. 35–66.
- [3] Елинсон М. И., Васильев Г. Ф. Автоэлектронная эмиссия. М.: Физматлит, 1958. 272 с.
- [4] Xiaosheng Fang, Yoshio Bando, Ujjal K. Gautam, Changhui Ye and Dmitri Golberg. Inorganic semiconductor nanostructures and their field-emission applications. The Royal Society of Chemistry, vol. 18, 2008, pp. 509–522.
- [5] Гусинский Г. М., Баранова Л. А., Найденов В. О. Субмикронный источник свободных электронов // Журнал технической физики. 2015. Т. 85. Вып. 3. С. 129–132.
- [6] T. A. Roth. The field emitter: Electric field calculation // Journal of Applied Physics, vol. 45, No. 11, November 1974, pp. 4771–4773.
- [7] Виноградова Е. М., Егоров Н. В. Математическое моделирование диодной системы на основе полевого эмиттера // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. Вып. 9. С. 1–5.
- [8] Виноградова Е. М., Листрукова А. В. Математическое моделирование квадрупольной электростатической линзы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 1. С. 19–27.
- [9] Калатурская Э. В., Виноградова Е. М. Расчёт полевого диода цилиндрической формы // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т. 4. № 1. С. 91–94.

- [10] Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. 476 с.
- [11] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
- [12] Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
- [13] Виноградова Е. М. Математическое моделирование электронно-оптических систем. Учебно-метод. пособие. — СПб., 2005. — 112 с.
- [14] Маслова Т. А., Виноградова Е. М. Моделирование эллиптического диода // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 194-198.
- [15] T. A. Maslova and E. M. Vinogradova, "Diode System on the Basis of Field Emitter with Semi-Ellipsoid Shape Mathematical Modeling", in Young Researchers in Vacuum Micro/Nano Electronics (VMNE-YR), Saint Petersburg, Oct. 2016.
- [16] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [17] Баблюян А. А. Решение некоторых парных рядов. Отчеты Академии наук СССР. 1964. Т. 39. № 3. С. 149-158.
- [18] Маслова Т. А. Моделирование эмиссионной системы с модулятором на основе острейного полевого катода // Актуальные проблемы микро- и нанoeлектроники. Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. С. 19–20.
- [19] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.
- [20] Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 1959. — 232 с.

- [21] Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. — 2-е изд., стереот. М.: Физматлит, 2002. — 160 с.
- [22] Маслова Т. А., Виноградова Е. М. Моделирование эмиссионной системы с диэлектрическими прослойками // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т. 4. № 1. С. 171-174.
- [23] T.A. Maslova and E.M. Vinogradova, "Triode System on the Basis of Field Emitter with Ellipsoid Shape Mathematical Modeling", in Young Researchers in Vacuum Micro/Nano Electronics (VMNE-YR), Saint Petersburg, Oct. 2017.
- [24] A. A. Saharian. A summation formula over the zeros of a combination of the associated Legendre functions with a physical application // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, vol. 42, 2009, 15 pp.
- [25] Emilio Elizalde, Masato Minamitsuji, and Wade Naylor. Casimir effect in rugby-ball type flux compactifications // Phys. Rev. vol. 75, March 2007.
- [26] Naylor W., Sasaki M. Quantum Fluctuations for de Sitter Branes in Bulk AdS5 // Prog. Theor. Phys. vol. 113, March 2005, pp. 535–554.
- [27] A. A. Grib, S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko. Vacuum Quantum Effects in Strong Fields. Friedmann Laboratory Publishing, St.Petersburg, 1994.
- [28] V. Pavlov, Effect of the space charge of emitted electrons on field electron emission, Tech. Phys., vol. 49 (12), 2004, pp. 1610-1616.
- [29] E. M. Vinogradova, E. N. Egorov, D. S. Televnyy. Mathematical modeling of field emitter array, Vacuum, vol. 127, 2016, pp. 45-50.
- [30] Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. М.: ГИТТЛ, 1957. 608 с.

- [31] Ляшенко С. А., Волков А. П., Образцов А. Н. Ограничение тока нанографитных многоэмитерных автокатодов // Журнал технической физики. 2012. Т. 82. Вып. 2. С. 94-98.
- [32] Ехонович А. С. Краткий справочник по физике. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: «Высш. школа», 1976. 288 с.